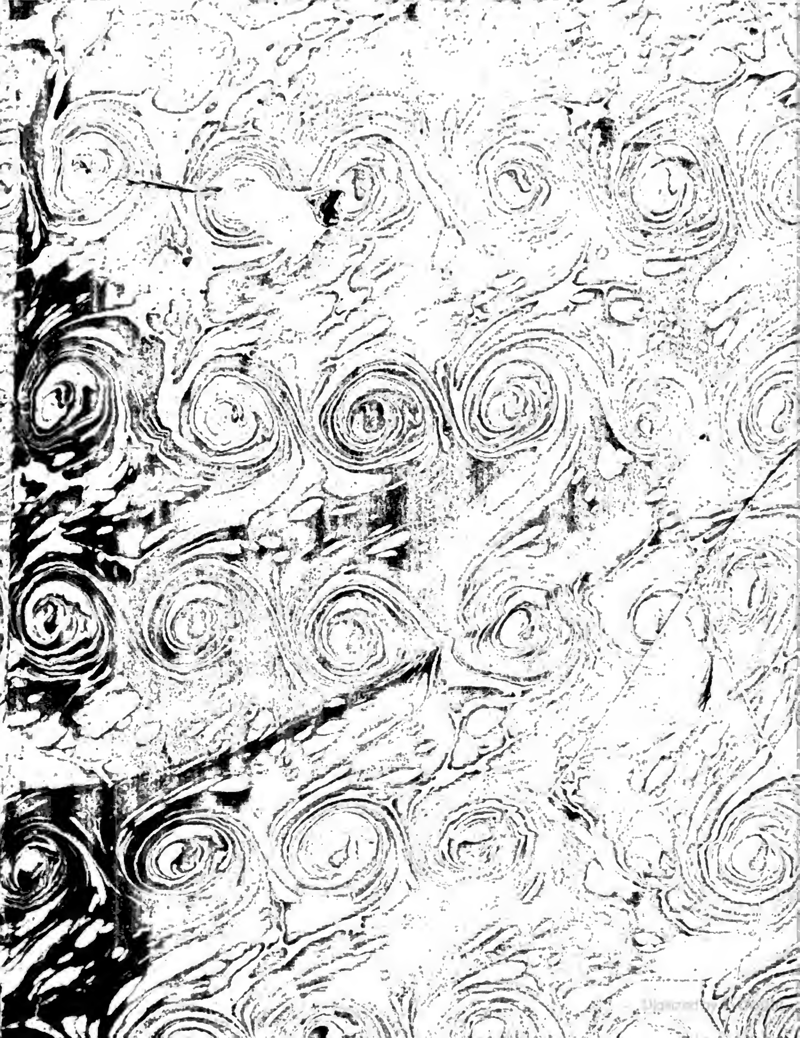






PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE.

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME SECOND.

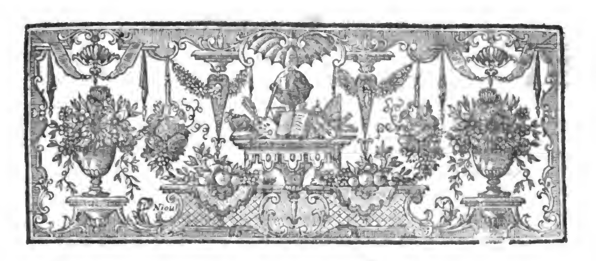


A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais. ET LAMBERT, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

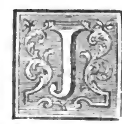
M. D. CC. LVI.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.



DU SYSTÊME DU MONDE.

LIVRE TROISIÉME.



J'AI donné dans les Livres précédens les principes de la Philosophie naturelle, & je les ai traités plutôt en Mathématicien qu'en Physicien, car les vérités mathématiques peuvent servir de base à plusieurs recherches philosophiques, telles que les loix du mouvement & des forces motrices. Et afin de rendre les matieres plus interessantes, j'y ai joint quelques scholies dans lesquels j'ai traité de la densité des corps & de leur résistance, du vuide, du mouvement du son & de celui de la lumiere; qui sont, à proprement parler, des recherches plus physiques. Il me reste à expliquer par les mêmes principes mathématiques le systême général du monde.

J'avois d'abord traité l'objet de ce troisiéme Livre par une Méthode moins mathématique, afin qu'il pût être à la portée de plus de personnes. Mais de crainte de donner lieu aux chicanes

Du Systeme du Monde.

de ceux qui ne voudroient pas quitter leurs anciens préjugés, parce qu'ils ne sentiroient pas la force des conséquences que je tire de mes principes, faute d'avoir assez médité les Propositions que j'ai données dans les Livres précedens, j'ai rédigé ce Livre en plusieurs Propositions, sélon la méthode des Mathématiciens, pour ceux qui auront lu les deux premiers Livres, car c'est pour eux que ce troisiéme Livre est destiné; & comme il y a dans les deux premiers Livres plusieurs Propositions qui pourroient arrêter long-temps, même les Mathématiciens, je ne prétends pas exiger qu'ils lisent ces deux premiers Livres entiers; il leur suffira d'avoir lu attentivement les Définitions, les Loix du Mouvement, & les trois premieres Sections du premier Livre, & ils pourront passer ensuite à ce troisiéme Livre, qui traite du Systême du Monde, & avoir soin seulement de consulter les autres Propositions des deux premiers Livres lorsqu'ils les trouveront citées & qu'ils en auront besoin.

REGLES QU'IL FAUT SUIVRE DANS L'ETUDE DE LA PHYSIQUE.

REGLE PREMIERE.

Il ne faut admettre de causes, que celles qui sont nécessaires pour expliquer les Phénomenes.

La nature ne fait rien en vain, & ce seroit faire des choses inutiles que d'opérer par un plus grand nombre de causes ce qui peut se faire par un plus petit.

REGLE II.

Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause.

Ainsi la respiration de l'homme & celle des bêtes; la chute d'une pierre en Europe & en Amérique; la lumiere du feu d'ici-bas

& celle du Soleil ; la réflexion de la lumiere sur la terre & dans les Planettes, doivent être attribuées respectivement aux mêmes causes.

REGLE III.

Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, & qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.

On ne peut connoître les qualités des corps que par l'expérience, ainsi on doit regarder comme des qualités générales celles qui se trouvent dans tous les corps, & qui ne peuvent souffrir de diminution, car il est impossible de dépouiller les corps des qualités qu'on ne peut diminuer. On ne peut pas opposer des rêveries aux expériences, & on ne doit point abandonner l'analogie de la nature qui est toujours simple & semblable à elle-même.

L'étendue des corps ne se connoît que par les sens, & elle ne se fait pas sentir dans tous les corps : mais comme l'étendue appartient à tous ceux qui tombent sous nos sens, nous affirmons qu'elle appartient à tous les corps en général.

Nous éprouvons que plusieurs corps sont durs : or la dureté du tout vient de la dureté des parties, ainsi nous admettons cette qualité non-seulement dans les corps dans lesquels nos sens nous la font éprouver, mais nous en inférons, avec raison, que les particules indivisées de tous les corps doivent être dures.

Nous concluons de la même maniere, que tous les corps sont impénétrables. Car tous ceux que nous touchons étant impénétrables, nous regardons l'impénétrabilité comme une propriété qui appartient à tous les corps.

Tous les corps que nous connoissons étant mobiles, & doués d'une certaine force (que nous appellons force d'inertie) par laquelle ils persévérent dans le mouvement ou dans le repos, nous concluons que tous les corps en général ont ces propriétés. L'extension, la dureté, l'impénétrabilité, la mobilité, & l'inertie

du tout vient donc de l'extenſion, de la dureté, de l'impénétrabilité, de la mobilité, & de l'inertie des parties : d'où nous concluons que toutes les petites parties de tous les corps ſont étendues, dures, impénétrables, mobiles, & douées de la force d'inertie. Et c'eſt-là le fondement de toute la Phyſique.

De plus, nous ſçavons encore par les phénomenes, que les parties contigues des corps peuvent ſe ſéparer, & les Mathématiques font voir que les parties indiviſées les plus petites peuvent être diſtinguées l'une de l'autre par l'eſprit. On ignore encore ſi ces parties diſtinctes, & non diviſées, pourroient être ſéparées par les forces de la nature ; mais s'il étoit certain, par une ſeule expérience, qu'une des parties, qu'on regarde comme indiviſibles, eût ſouffert quelque diviſion en ſéparant ou briſant un corps dur quelconque : nous conclurions par cette regle, que non ſeulement les parties diviſées ſont ſéparables, mais que celles qui ſont indiviſées peuvent ſe diviſer à l'infini.

Enfin, puiſqu'il eſt conſtant par les expériences & par les obſervations aſtronomiques, que tous les corps qui ſont près de la ſurface de la terre péſent ſur la terre, ſelon la quantité de leur matiere ; que la lune péſe ſur la terre à raiſon de ſa quantité de matiere, que notre mer péſe à ſon tour ſur la lune, que toutes les planettes péſent mutuellement les unes ſur les autres, & que les cométes péſent auſſi ſur le ſoleil, on peut conclure, ſuivant cette troiſiéme regle que tous les corps gravitent mutuellement les uns vers les autres. Et ce raiſonnement en faveur de la gravité univerſelle des corps, tiré des phénomenes, ſera plus fort que celui par lequel on conclut leur impénétrabilité : car nous n'avons aucune expérience ni aucune obſervation qui nous aſſure que les corps céleſtes ſont impénétrables. Cependant je n'affirme point que la gravité ſoit eſſentielle aux corps. Et je n'entends par la force qui réſide dans les corps, que la ſeule force d'inertie, laquelle eſt immuable ; au-lieu que la gravité diminue lorſqu'on s'éloigne de la terre.

REGLE IV.

Dans la Philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomenes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme éxactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce que quelques autres phénomenes les confirment entierement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions.

Car une hypothèse ne peut affoiblir les raisonnemens fondés sur l'induction tirée de l'expérience.

PHE'NOMENES.

PHÉNOMENE PREMIER.

Les satellites de Jupiter décrivent autour de cette Planette des aires proportionnelles aux temps, & leurs temps périodiques (en supposant que les étoiles fixes soient en repos) sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de cette Planette.

C'est ce qui est constaté par les observations astronomiques. Car les orbes de ces planettes sont à peu près des cercles concentriques à Jupiter, & leurs mouvemens dans ces cercles paroissent uniformes. A l'égard de leurs temps périodiques tous les Astronomes conviennent qu'ils sont en raison sesquiplée des demi diamétres de leurs orbes; & c'est ce qu'on va voir par la table suivante.

Temps périodiques des satellites de Jupiter.

$1^{j}\ 18^{h}\ 27'\ 34''$. $3^{j}\ 13^{h}\ 13'\ 42''$. $7^{j}\ 3^{h}\ 42'\ 36''$. $16^{j}\ 16^{h}\ 32'\ 9''$.

Distances des satellites au centre de Jupiter.

	1	2	3	4	
Par les observations de Borelli.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	demi diamétre de Jupiter.
de Townley, par le Micrométre.	5,52	8,78	13,47	24,72	
de Cassini, par le Télescope.	5	8	13	23	
de Cassini, par les éclipses des satellites.	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Par les temps périodiques.	5,667	9,017	14,384	25,299	

DU SYSTEME DU MONDE.

Les élongations des satellites de Jupiter & son diamétre ont été déterminées trés-exactement par le Docteur *Pound* avec d'excellens micrométres de la maniere suivante.

La plus grande élongation héliocentrique du quatriéme satellite au centre de Jupiter fut prise avec un micrométre placé dans un tube de 15 pieds, & elle se trouva de 8′ 16″ environ dans la moyenne distance de Jupiter à la terre.

Celle du troisiéme satellite fut prise avec un télescope de 123 pieds armé d'un micrométre, & elle se trouva à la même distance de Jupiter à la terre, de 4′ 42″. Les plus grandes élongations des autres satellites, à la même distance de Jupiter à la terre, sont, par les temps périodiques, de 2′ 56″ 47‴, & de 1′ 51″ 6‴.

Le diamétre de Jupiter fut pris souvent avec un micrométre placé dans un télescope de 123 pieds, & ce diamétre étant réduit à la moyenne distance de Jupiter au Soleil ou à la terre, il se trouva toujours avoir moins de 40″, mais jamais moins que 38″, & il en avoit souvent 39″. Avec des télescopes moins grands ce diamétre est de 40″ ou de 41″. Car la lumiere de Jupiter à cause de l'inégale refrangibilité des rayons, est un peu dilatée, & cette dilatation a une moindre raison au diamétre de Jupiter dans les grands télescopes qui sont faits avec exactitude, que dans ceux qui sont plus petits ou moins parfaits.

Dans les observations des passages du premier & du troisiéme satellite sur le disque de Jupiter, par lesquelles on détermina les temps écoulés depuis le commencement de l'entrée sur le disque jusqu'au commencement de la sortie, & depuis l'entrée totale jusqu'à la sortie totale, on employa un telescope de la même longueur. Et le diamétre de Jupiter dans sa moyenne distance à la terre se trouva, par le passage du premier satellite, de $37\frac{1}{8}$″, & par le passage du troisiéme, de $37\frac{3}{8}$″. Mais le temps que l'ombre du premier satellite employa à traverser le disque de Jupiter ayant été observé, il donna le diamétre de Jupiter de 37″

environ, dans la moyenne diſtance de Jupiter à la terre. Prenant donc environ $57\frac{1}{4}''$ pour ce diamétre, les plus grandes élongations du premier, du ſecond, du troiſiéme, & du quatriéme ſatellite meſurées en demi diamétres de Jupiter ſont de 5,965. 9,494. 15,141. & 26,63. reſpectivement.

PHÉNOMENE II.

Les ſatellites de Saturne décrivent autour de cette Planette des aires proportionnelles aux temps; & leurs temps périodiques, (les étoiles fixes étant ſuppoſées en repos) ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances au centre de Saturne.

Les obſervations de Caſſini donnent les diſtances de ces planettes au centre de Saturne, & leurs temps périodiques, tels qu'ils ſont marqués dans la table ſuivante.

Temps périodiques des ſatellites de Saturne.

$1^j\ 21^h\ 18'\ 27''$. $2^j 17^h\ 41'\ 22''$. $4^j\ 12^h\ 25'\ 12''$. $15^j\ 22^h\ 41'\ 14''$. $79^j\ 7^h\ 48'\ 00''$.

Diſtances des ſatellites au centre de Saturne en demi diamétres de ſon anneau.

Par les obſervations.	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Par les temps périodiques.	1,93.	2,47.	3.45.	8.	23,35.

Les obſervations donnent ordinairement pour la plus grande élongation du quatriéme ſatellite au centre de Saturne environ huit demi diamétres. Mais cette plus grande élongation priſe avec un excellent micrométre adapté à un téleſcope d'*Hughens* de 123 pieds, a été trouvée de huit demi diamétres & $\frac{7}{10}$. Par cette obſervation & par les temps périodiques, les diſtances des ſatellites au centre de Saturne ſont en demi diamétres de ſon anneau de 2, 1. 2,69. 3,75. 8, 7. & 25, 35.

Le diamétre de Saturne, par le même téleſcope, étoit au diamétre de ſon anneau, comme 3 à 7, & le diamétre de l'anneau

les 28 & 29 May de l'année 1719. fut trouvé de 43″, ce qui donne 42″ pour le diamétre de l'anneau dans la moyenne distance de Saturne à la terre, & 18″ pour le diamétre de Saturne. C'est ainsi qu'on les trouve avec les meilleurs & les plus grands télescopes, car dans les grands télescopes, les grandeurs apparentes des corps célestes ont une plus grande proportion à la dilatation de la lumiere vers les bords de leurs disques, que dans les petits. Si on ôte toute la lumiere erratique, le diamétre de Saturne sera à peine de 16″.

PHÉNOMENE III.

Les cinq principales planettes, Mercure, Venus, Mars, Jupiter & Saturne enferment le Soleil dans leurs orbes.

Il est prouvé par les phases de Mercure & de Venus que ces planettes tournent autour du Soleil. Lorsque tout leur disque est éclairé elles sont au-delà du Soleil ; quand leur disque est à moitié obscurci elles sont en quadrature avec le Soleil ; & quand elles paroissent en croissant elles sont entre le Soleil & nous ; & quelquefois elles passent sur son disque sur lequel elles paroissent alors comme des espéces de taches. On est certain que Mars enferme le Soleil dans son orbe, parce que son disque est entierement éclairé lorsqu'il est prêt d'être en conjonction avec le Soleil, & qu'il est gibbeux dans ses quadratures. La même chose est prouvée pour Saturne & pour Jupiter parce qu'ils nous paroissent toujours entierement éclairés : & la projection des ombres de leurs satellites sur leur globe prouve que ces planettes empruntent leur lumiere du Soleil.

PHÉNOMENE IV.

Les temps périodiques des cinq principales planettes autour du Soleil, & celui de la terre autour du Soleil, ou du Soleil autour de la terre, (en supposant les étoiles fixes en repos) sont en raison sesquiplée de leur moyenne distance au Soleil.

Tout le monde sçait que cette Proportion a été découverte par

par *Kepler.* Les temps périodiques & les dimenſions des orbites ſont les mêmes, ſoit que le Soleil tourne autour de la terre, ſoit que la terre tourne autour du Soleil. Tous les Aſtronomes conviennent de la raiſon dans laquelle ſont les temps périodiques. Mais pour les grandeurs des orbites, *Kepler & Bouillaut* ſont ceux qui les ont déterminées avec le plus de ſoin d'après les obſervations : & les diſtances moyennes, qui répondent aux temps périodiques, ne différent pas ſenſiblement des diſtances qu'ils ont trouvées, & elles ſont pour la plûpart moyennes entre ce que donnent leurs obſervations ; comme on le peut voir dans la table ſuivante.

Temps périodiques de la terre & des planettes autour du Soleil par rapport aux fixes, en jours & en parties décimales de jour.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Diſtances moyennes des planettes & de la terre au Soleil.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Selon *Kepler.*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Selon *Bouillaut.*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Selon les temps périodiques.	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

Il n'y a point de diſputes ſur les diſtances de Venus & de Mercure au Soleil, car elles ſont déterminées par leurs élongations au Soleil. Et les éclipſes des ſatellites de Jupiter ôtent toute eſpéce de doute ſur les diſtances au Soleil des planettes ſupérieures. Car par ces éclipſes on détermine la poſition de l'ombre que Jupiter projette, & par-là on a la longitude héliocentrique de Jupiter. Et les longitudes héliocentriques & géocentriques comparées entre elles déterminent la diſtance de Jupiter.

PHÉNOMENE V.

Si on prend la terre pour centre des révolutions des planettes principales, les aires qu'elles décrivent ne seront point proportionnelles aux temps; mais si on regarde le Soleil comme le centre de leurs mouvemens, on trouvera alors leurs aires proportionnelles aux temps.

Dans la premiere de ces suppositions on trouveroit que les planettes avancent quelquefois, que quelquefois elles sont stationnaires, & que d'autres fois elles sont rétrogrades : mais dans la seconde elles avancent toujours, & cela d'un mouvement à peu près uniforme, qui est cependant un peu plus prompt dans leurs périhélies, & plus lent dans leurs aphélies, ensorte que les aires sont toujours égales en temps égaux. Cette Proposition est très-connue des Astronomes, & elle est démontrée surtout avec une grande évidence pour la planette de Jupiter par les éclipses de ses satellites, lesquelles, comme nous avons déja dit, déterminent les longitudes héliocentriques de cette planette & ses distances au Soleil.

PHÉNOMENE VI.

La Lune décrit autour de la terre des aires proportionnelles aux temps.

Cela se prouve par le mouvement angulaire de la Lune, & par son diamétre apparent. Les mouvemens de la Lune sont à la vérité un peu troublés par la force du Soleil, mais je néglige dans ces Phénomenes ces petites erreurs insensibles.



PROPOSITIONS.

PROPOSITION I. THÉORÉME I.

Les forces par lesquelles les satellites de Jupiter sont retirés perpétuellement du mouvement rectiligne & retenus dans leurs orbites, tendent au centre de Jupiter & sont en raison réciproque des quarrés de leurs distances à ce centre.

La premiere partie de cette Proposition est prouvée par le Phénomene 1. & par la seconde & la troisiéme Proposition du premier Livre : & la derniere l'est par le premier Phénomene, & par le Cor. 6. de la Prop. 4. du même Livre.

Il en est de même des satellites de Saturne par le Phénomene 2.

PROPOSITION II. THÉORÉME II.

Les forces par lesquelles les planettes principales sont perpétuellement retirées du mouvement rectiligne, & retenues dans leurs orbites, tendent au Soleil, & sont réciproquement comme le quarré de leurs distances à son centre.

La premiere partie de cette Proposition se prouve par le Phénomene 5. & par la seconde Proposition du Livre 1. l'autre partie se prouve par le Phénomene 4. & la Prop. 4. du même Livre. Cette seconde partie de la Proposition se démontreroit encore très-rigoureusement par la fixité des aphélies. Car pour peu que les planettes s'écartassent de cette loi le mouvement des apsides seroit remarquable à chaque révolution, (par le Cor. 1. de la Prop. 45. Liv. 1.) & deviendroit très-considérable au bout de plusieurs révolutions.

PROPOSITION III. THÉORÉME III.

La force qui retient la Lune dans son orbite, tend vers la terre, &

est en raison réciproque du quarré de la distance des lieux de la Lune au centre de la terre.

La premiere partie de cette Proposition se prouve par le Phénomene 6. & par les Propositions 2. & 3. du premier Livre, & la derniere par le mouvement très-lent de l'apogée lunaire. Car ce mouvement, qui à chaque révolution n'est que de trois dégrés & de trois minutes en conséquence, peut être négligé. Or il est clair (par le Cor. 1. de la Prop. 45. Liv. 1.) que si on prend le rapport de D à 1. pour exprimer celui de la distance de la Lune du centre de la terre au demi diamétre de la terre; la force qui produit ce mouvement, sera réciproquement comme $D^{2\frac{4}{243}}$, c'est-à dire, en une raison un peu plus grande que la raison doublée inverse de la distance, mais qui approche plus de $59\frac{3}{4}$ parties de la doublée que de la triplée; & comme la différence de cette force à celle qui seroit exactement en raison inverse du quarré, vient de l'action du Soleil, (comme je l'expliquerai dans la suite) on peut la négliger ici. L'action du Soleil en tant qu'il détourne la Lune de la terre, est à peu près comme la distance de la Lune à la terre; donc (par ce qui a été dit dans le Cor. 2. de la Prop. 45. du Liv. 1.) elle est à la force centripéte de la Lune comme 2 à 357, 45 à peu près, ou comme 1 à $178\frac{29}{40}$. Et en négligeant cette petite action du Soleil, la force restante par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, sera réciproquement comme D^2, ce qui paroîtra clairement en comparant cette force avec la force de la gravité, comme dans la Proposition suivante.

Cor. Si la force centripéte médiocre par laquelle la Lune est retenue dans son orbite est premiérement augmentée dans la raison de $177\frac{29}{40}$, à $178\frac{29}{40}$, & ensuite en raison doublée du demi diamétre de la terre à la moyenne distance du centre de la Lune au centre de la terre: on aura la force centripéte de la Lune près de la surface de la terre, en supposant que cette force, en

descendant vers la surface de la terre, augmente continuellement en raison doublée inverse de la hauteur.

PROPOSITION IV. THÉORÉME IV.

La Lune gravite vers la terre, & par la force de la gravité elle est continuellement retirée du mouvement rectiligne & retenue dans son orbite.

La moyenne distance de la Lune à la terre dans les syzygies est, suivant *Ptolomée* & plusieurs Astronomes, de 59 demi diamétres de la terre, *Vendelinus* & *Hughens* la font de 60, *Copernic* de $60\frac{1}{3}$, *Street* de $60\frac{2}{5}$ & *Ticho* de $56\frac{1}{2}$. Mais *Ticho* & tous ceux qui suivent ses tables de réfraction, supposent que les réfractions du Soleil & de la Lune sont plus grandes que celles des étoiles fixes, de 4 ou 5 minutes environ, (ce qui est entierement contraire à ce qu'on connoît de la lumiere) & par-là ils ont augmenté la parallaxe de la Lune d'autant de minutes, c'est-à-dire, presque de la douziéme ou de la quinziéme partie de toute sa parallaxe.

En corrigeant cette erreur, on trouvera cette distance déterminée par *Ticho* de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre environ, c'est-à-dire, telle à peu près que les autres Astronomes l'avoient trouvée.

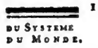
Prenons 60 demi diamétres de la terre pour la distance moyenne dans les syzygies; & supposons que la révolution de la Lune autour de la terre, par rapport aux étoiles fixes, s'acheve en 27 jours 7 heures 43 minutes, comme les Astronomes l'ont déterminé : enfin prenons 123249600 pieds de Paris pour la circonférence de la terre, suivant les mesures prises en France : on aura $15\frac{1}{2}$ pieds de Paris pour l'espace que la Lune parcoureroit en une minute, si elle étoit privée de tout autre mouvement & qu'elle descendit vers la terre par la seule force qui la retient (selon le Cor. de la Prop. 3.) dans son orbite : ce qui est aisé à tirer, par le calcul, soit de la Prop. 36. du Liv. 1. ou (ce qui revient au même) du Cor. 9. de la quatriéme Proposition du même Livre. Car le sinus verse de l'arc que la

Lune parcourt en une minute, dans son mouvement moyen, à la distance de 60 demi diamétres de la terre, est de $15\frac{1}{12}$ pieds de Paris environ, ou plus exactement de 15 pieds un pouce & $1\frac{4}{9}$ lignes. Or, comme cette force doit augmenter en approchant de la terre en raison doublée inverse de la distance, & que par conséquent elle doit être 60×60 fois plus grande à la surface de la terre qu'à la distance où est la Lune ; un corps qui tomberoit avec cette force, devroit parcourir ici-bas dans une minute $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ pieds de Paris, & dans une seconde $15\frac{1}{12}$ pieds de Paris, ou plus exactement 15 pieds 1 pouce & $1\frac{4}{9}$ lignes. Et c'est en effet l'espace que les corps décrivent dans une seconde en tombant vers la terre. Car la longueur du pendule qui bat les secondes dans la latitude de Paris, est de 3 pieds de Paris & 8 lignes & demie, selon que *M. Hughens* l'a déterminé ; & la hauteur qu'un corps grave parcourt en tombant pendant une seconde, est à la demi longueur de ce pendule en raison doublée de la circonférence du cercle à son diamétre (comme *M. Hughens* l'a aussi déterminé) c'est-à-dire, que cette hauteur est de 15 pieds de Paris 1 pouce & $1\frac{7}{9}$ lignes. Donc la force par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, seroit égale à la force de la gravité ici-bas, si la Lune étoit près de la surface de la terre, donc (selon les Regles 1 & 2.) c'est cette même force que nous appellons *gravité*. Car si cette force étoit autre que la gravité, les corps en s'approchant de la terre par ces deux forces réunies descendroient deux fois plus vîte, & ils parcoureroient en tombant pendant une seconde un espace de $30\frac{1}{6}$ pieds de Paris : ce qui est entierement contraire à l'expérience.

Ce calcul est fondé sur l'hypotése que la terre est en repos, car si la terre & la Lune se meuvent autour du Soleil, & qu'elles tournent en même temps autour de leur commun centre de gravité : la distance respective des centres de la Lune & de la terre sera de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre environ, la loi de la gravité demeurant la même ; c'est ce qu'on verra clairement si on en veut faire le calcul, lequel ne demande que la Prop. 60. du Livre 1.

SCHOLIE.

On peut rendre la démonſtration de cette Propoſition plus ſenſible, par le raiſonnement ſuivant. Si pluſieurs Lunes faiſoient leurs révolutions autour de la terre, ainſi que dans le ſyſtême de Jupiter ou de Saturne, leurs temps périodiques, par l'induction, ſuivroient la loi découverte par *Kepler*, & par conſéquent leurs forces centripétes (Prop. 1. de ce Livre) ſeroient réciproquement comme les quarrés de leurs diſtances au centre de la terre. Et ſi celle de ces Lunes qui ſeroit la plus proche de la terre étoit petite, & qu'elle touchât preſque le ſommet des plus hautes montagnes : la force centripéte, par laquelle cette Lune ſeroit retenue dans ſon orbite, ſeroit, ſuivant le calcul précédent, à peu près égale à celle des corps graves placés ſur le ſommet de ces montagnes. Enſorte que ſi cette même petite Lune étoit privée de tout le mouvement par lequel elle avance dans ſon orbe, & qu'elle n'eût plus par conſéquent de force centrifuge, elle deſcendroit vers la terre avec la même vîteſſe que les corps graves placés au ſommet de ces montagnes tombent vers la terre, & cela à cauſe de l'égalité qui ſeroit entre la gravité & la force qui agiroit alors ſur cette petite Lune. Or ſi la force par laquelle cette petite Lune deſcend étoit autre que la gravité, & que cependant elle peſât ſur la terre comme les corps graves placés au ſommet de ces montagnes, cette petite Lune devroit par ces deux forces réunies deſcendre deux fois plus vîte. Donc, puiſque ces deux forces, c'eſt-à-dire, celles des corps graves & celles de ces petites Lunes, ſont dirigées vers le centre de la terre, & qu'elles ſont égales & ſemblables entr'elles, ces forces ſont les mêmes & par conſéquent elles doivent avoir (Regles 1 & 2.) une même cauſe. Donc la force, qui retient la Lune dans ſon orbite, eſt celle-là même que nous appellons gravité : puiſque ſans cela cette petite Lune n'auroit point de gravité au ſommet de cette montagne, ou bien elle tomberoit deux fois plus vîte que les graves.



PROPOSITION V. THÉORÉME V.

Les ſatellites de Jupiter gravitent vers Jupiter, ceux de Saturne vers Saturne, & les planettes principales vers le Soleil, & c'eſt par la force de leur gravité que ces corps révolvans ſont retirés à tout moment de la ligne droite & qu'ils ſont retenus dans des orbites curvilignes.

Car les révolutions des ſatellites de Jupiter autour de Jupiter, celles des ſatellites de Saturne autour de Saturne, & celles de Mercure, de Venus & des autres planettes principales autour du Soleil, ſont des Phénomenes du même genre que celui de la révolution de la Lune autour de la terre; & par conſéquent, par la ſeconde Regle, ils doivent dépendre de cauſes du même genre: ſurtout puiſqu'il eſt démontré, que les forces dont dépendent ces révolutions tendent au centre de Jupiter, de Saturne & du Soleil, & qu'en s'éloignant de Jupiter, de Saturne & du Soleil, ces forces décroiſſent dans la même raiſon, dans laquelle la force de la gravité décroît en s'éloignant de la terre.

Cor. 1. Toutes les planettes ſont donc peſantes. Car perſonne ne doute que Venus, Mercure & toutes les autres planettes ne ſoient des corps du même genre que Jupiter & Saturne. Et comme toute attraction eſt mutuelle par la troiſiéme loi du mouvement, Jupiter doit graviter vers tous ſes ſatellites, Saturne vers tous les ſiens, la terre vers la Lune, & le Soleil vers toutes les planettes principales.

Cor. 2. La gravité vers chaque planette eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance à ſon centre.

Cor. 3. Par les Cor. 1. & 2. toutes les planettes gravitent les unes vers les autres, ainſi Jupiter & Saturne en s'attirant mutuellement, troublent ſenſiblement leurs mouvemens vers leur conjonction, le Soleil trouble ceux de la Lune, & le Soleil & la Lune ceux de notre mer, comme je l'expliquerai dans la ſuite

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Nous avons appellé jusqu'ici la force qui retient les corps célestes dans leur orbite *force centripéte.* On a prouvé que cette force est la même que la gravité, ainsi dans la suite nous l'appellerons *gravité.* Car la cause de cette force centripéte, qui retient la Lune dans son orbite, doit s'étendre à toutes les planettes par les Regles 1. 2 & 4.

PROPOSITION VI. THÉORÉME VI.

Tous les corps gravitent vers chaque planette, & sur la même planette quelconque leurs poids, à égale distance du centre, sont proportionnels à la quantité de matiere que chacun d'eux contient.

Tous les corps descendent vers la terre dans des temps égaux (en faisant abstraction de l'inégale rétardation causée par la petite résistance de l'air) c'est ce que plusieurs Philosophes avoient déja observé, & ce qu'on peut connoître avec précision par l'égalité des temps dans lesquels se font les oscillations des pendules. J'en ai fait l'expérience avec des pendules d'or, d'argent, de plomb, de verre, de sable, de sel commun, de bois, d'eau, & de froment. Pour y réussir, je fis faire deux boëtes de bois rondes & égales, j'en emplis une de bois, & je mis un poids égal d'or dans l'autre, en le plaçant aussi exactement que je le pus dans le point qui répondoit au centre d'oscillation de la premiere boëte. Ces boëtes étoient suspendues à deux fils égaux de 11 pieds chacun, ainsi j'avois par-là deux pendules entierement pareils quant au poids, à la figure, & à la résistance de l'air. Ces pendules, dont les poids étoient placés à côté l'un de l'autre firent des oscillations qui se suivirent pendant un très-long-temps. Donc, la quantité de matiere de l'or, étoit à la quantité de matiere du bois (par les Cor. 1. & 6. de la Prop. 24. du Liv. 2.) comme l'action de la force motrice sur tout l'or à cette même action sur tout le

bois, c'est-à-dire, comme le poids au poids. Il en fut de même dans les autres pendules. Dans ces expériences une différence d'un milliéme dans la matiere des corps de même poids étoit aisée à appercevoir.

Il n'y a donc aucun doute que la nature de la gravité ne soit la même dans les planettes & sur la terre. Car supposé que quelque corps terrestre fut élevé jusqu'à l'orbe de la lune, & que la lune & ce corps, étant privés de tout mouvement, fussent abandonnés à leur gravité, & tombassent ensemble vers la terre; il est certain, par ce qu'on a déja dit, que ce corps & la lune parcoureroient des espaces égaux en temps égaux, & que par conséquent son poids seroit à celui de la lune en même raison que leurs quantités de matiere.

De plus, comme les satellites de Jupiter font leurs révolutions autour de cette planette dans des temps qui sont en raison sesquiplée de leurs distances à son centre, leurs gravités accellératrices vers Jupiter seront réciproquement comme le quarré de leurs distances à son centre; & par conséquent, à égales distances de Jupiter, elles seront égales. Ainsi ils parcoureroient des espaces égaux en temps égaux en tombant vers Jupiter de hauteurs égales; comme il arrive aux graves sur notre terre. Et par le même raisonnement les planettes qui tournent autour du Soleil, étant abandonnées à la force qui les porte vers cet astre, parcoureroient en descendant vers lui des espaces égaux en temps égaux s'ils tomboient de hauteurs égales. Or les forces qui accellérent également des corps inégaux sont comme ces corps; c'est-à-dire, que les poids des corps sur les planettes sont comme la quantité de matiere qu'ils contiennent.

De plus, les poids de Jupiter & de ses satellites sur le Soleil sont proportionnels à leur quantité de matiere, c'est ce qui est prouvé (Cor. 3. Prop. 65. Liv. 1.) par le mouvement très-régulier des satellites de Jupiter; car si l'un de ces satellites étoit plus attiré que les autres vers le Soleil, parce qu'il contient plus de

matiere, le mouvement des satellites (Cor. 2. Prop. 65. Liv. 1.) seroit dérangé par cette inégale attraction. Si, à distance égale du Soleil, un de ces satellites étoit plus pesant sur le Soleil à raison de sa quantité de matiere que Jupiter à raison de la sienne, dans une raison quelconque donnée, comme, par exemple, dans la raison de *d* à *e*, la distance entre le centre du Soleil & le centre de l'orbe de ce satellite seroit toujours plus grande que la distance entre le centre du Soleil & le centre de Jupiter à peu près en raison sousdoublée, comme je l'ai trouvé en faisant le calcul. Et si le satellite étoit moins pesant vers le Soleil dans cette raison de *d* à *e*, la distance du centre de l'orbe du satellite au centre du Soleil seroit moindre que la distance du centre de Jupiter au centre du Soleil dans cette même raison sousdoublée. Donc, si, à distances égales du Soleil, la gravité accélératrice d'un satellite quelconque vers le Soleil étoit plus grande ou plus petite que la gravité accélératrice de Jupiter vers le Soleil, seulement de la milliéme partie de sa gravité totale; la distance du centre de l'orbe du satellite au Soleil seroit plus ou moins grande que la distance de Jupiter au Soleil de $\frac{1}{2000}$ partie de la distance totale, c'est-à-dire, de la cinquiéme partie de la distance du satellite le plus éloigné du centre de Jupiter, ce qui rendroit cet orbe très-sensiblement excentrique. Mais les orbes des satellites sont concentriques à Jupiter, ainsi les gravités accélératrices de Jupiter & de ses satellites vers le Soleil sont égales entr'elles. Par le même raisonnement, les poids de Saturne & de ses satellites sur le Soleil sont, à des distances égales du Soleil, comme la quantité de matiére que chacun d'eux contient: & la lune & la terre ou ne pésent point sur le Soleil, ou bien y pésent dans la proportion éxacte de leurs masses: or par les Cor. 1. & 3. de la Prop. 5. on voit qu'ils y doivent péser.

Ainsi les poids de chacune des parties d'une planette quelconque sur une autre planette sont entr'eux comme la quantité de matiére que chacune de ces parties contient. Car si quelques-

unes de ces parties gravitoient plus & d'autres moins que ſelon leur quantité de matiére : la planette totale graviteroit dans une raiſon plus ou moins grande que celle de ſa quantité de matiére, ſuivant la nature des parties dont elle contiendroit une plus grande quantité ; & il n'importe que ces parties fuſſent extérieures ou intérieures à la planette. Qu'on ſuppoſe, par exemple, que les corps d'ici-bas ſoient élevés juſqu'à l'orbe de la Lune, & qu'on les compare avec le corps de la Lune : ſi leurs poids étoient aux poids des parties externes de la Lune comme les quantités de matiére, & qu'ils fuſſent aux poids de ſes parties internes dans une plus grande ou une moindre raiſon, ces mêmes corps ſeroient au poids de la Lune entiere dans une plus grande ou une moindre raiſon : ce qui ſeroit contraire à ce qu'on vient de prouver.

Cor. 1. Ainſi, les poids des corps ne dépendent point de leur forme & de leur texture. Car ſi ces poids varioient avec la forme, ils ſeroient tantôt plus grands, & tantôt moindres, ſelon les differentes formes, quoique la quantité de matiere fut la même : ce qui eſt entiérement contraire à l'expérience.

Cor. 2. Tous les corps qui ſont autour de la terre péſent ſur la terre, & leurs poids, lorſqu'ils ſont également éloignés de ſon centre, ſont comme la quantité de matiére que chacun d'eux contient. C'eſt ce que les expériences ont fait voir dans tous les corps ſur leſquels on a pu en faire. Ainſi, par la troiſiéme régle, on doit affirmer la même choſe de tous les corps en général. Si l'Ether ou quelqu'autre corps étoit entiérement privé de gravité, ou qu'il gravitât dans une moindre raiſon que celle de ſa quantité de matiére : comme cette eſpéce de corps ne ſeroit différente des autres, ſuivant Ariſtote, Deſcartes & d'autres, que par la forme de ſes parties, il pourroit arriver, que ces corps, en changeant peu à peu de forme, ſe changeroient dans l'eſpéce des corps qui gravitent en raiſon de leur quantité de matiére ; & au contraire les corps graves pourroient perdre par la ſuite des temps leur gravité en prenant la même forme que les premiers. Ainſi

les poids dépendroient des formes & pourroient varier avec elles, contre ce qui a été prouvé dans le Cor. précédent.

Cor. 3. Tous les espaces ne sont pas également pleins. Car s'ils l'étoient, toute matiére seroit également dense, ainsi la gravité spécifique du fluide qui rempliroit la région de l'air, ne céderoit point à la gravité specifique du vif argent, de l'or, ou de quelqu'autre corps, quelque dense qu'il fut ; ainsi l'or ni aucun autre corps quelconque ne pourroit descendre dans l'air. Car les corps ne descendent dans les fluides que parce qu'ils sont spécifiquement plus pesans. Or si la quantité de matiére peut diminuer par la raréfaction jusqu'à un certain point dans un espace donné, pourquoi ne pourra-t-elle pas diminuer à l'infini ?

Cor. 4. Si les parties solides de tous les corps sont de la même densité, & qu'elles ne puissent se raréfier sans pores, il y a du vuide. Je dis que les parties ont la même densité lorsque leurs forces d'inertie sont comme leur grandeur.

Cor. 5. La force de la gravité est d'un autre genre que la force magnétique. Car l'attraction magnétique n'est point comme la quantité de matiére attirée. Certains corps sont plus attirés par l'aiman, d'autres moins : & plusieurs ne le sont point du tout. La force magnétique d'un même corps peut être augmentée ou diminuée, elle est quelquefois beaucoup plus grande par rapport à la quantité de matiére que la force de la gravité, elle ne decroît point en s'éloignant de l'aiman en raison doublée de la distance, mais presque en raison triplée, autant que je l'ai pû déterminer par des expériences assez grossiéres.

PROPOSITION VII. THÉORÉME VII.

La gravité appartient à tous les corps, & elle est proportionnelle à la quantité de matiére que chaque corps contient.

On a prouvé ci-dessus que toutes les planettes gravitent mutuellement les unes vers les autres : que la gravité vers une planette quelconque, considérée à part, est réciproquement comme

le quarré de la distance au centre de cette planette : & que par conséquent (Prop. 69. Liv. 1. & ses Cor.) la gravité dans toutes les planettes est proportionnelle à leur quantité de matiére.

Mais comme toutes les parties d'une planette quelconque *A*, pesent sur une autre planette quelconque *B*, que la gravité d'une partie quelconque est à la gravité du tout, comme la matiere de la partie est à la matiere totale, & que, par la troisiéme loi du mouvement, l'action & la réaction sont toujours égales ; la planette *B* gravitera à son tour vers toutes les parties de la planette *A*, & sa gravité vers une partie quelconque sera à sa gravité vers toute la planette, comme la matiére de cette partie à la matiere totale. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La gravité vers toute une planette, est donc composée de la gravité vers toutes ses parties. Nous en avons des exemples dans les attractions magnétiques & électriques. Car l'attraction vers le tout est composée des attractions vers chacune des parties. On verra qu'il en est de même dans la gravité, en supposant que plusieurs petites planettes s'unissent en un globe, & forment une grosse planette. Car on conçoit aisément par là que la force totale doit naître de la force des parties composantes. Si quelqu'un objecte que selon cette loi tous les corps d'ici bas devroient graviter les uns vers les autres, & que cependant cette gravité mutuelle n'est pas sensible : je répondrai, que cette gravité mutuelle des corps étant à leur gravité vers la terre, comme la masse de ces corps à la masse de la terre, elle n'est pas à beaucoup près assez forte pour pouvoir être apperçue.

Cor. 2. La gravité vers chaque particule égale d'un corps, est réciproquement comme le quarré des distances des lieux de ces particules. Ce qui est clair par le Cor. 3. de la Prop. 74. du premier Livre.

PROPOSITION VIII. THÉORÈME VIII.

Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distances de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres.

Après avoir trouvé que la gravité d'une planette entière est composée de celles de toutes ses parties ; & que la force de chaque partie est réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances : j'ai voulu sçavoir si cette proportion réciproque doublée étoit suivie exactement pour la force totale composée de toutes les forces partiales, ou si elle ne l'étoit qu'à peu près. Car on pourroit croire que cette proportion, qui est assez exactement suivie à de grandes distances, devroit souffrir beaucoup d'altération près de la superficie des planettes, à cause de l'inégalité des distances des parties & de leurs différentes positions. Les Prop. 75. & 76. du premier Livre & leurs Corollaires m'ont fait voir que cette proportion étoit encore éxactement observée dans le cas dont il s'agit.

Cor. 1. Par-là on peut trouver les poids des corps sur diverses planettes & les comparer entr'eux. Car les poids des corps égaux qui font leurs révolutions dans des cercles autour des planettes sont, par le Cor. 2. de la Prop. 4. du Liv. 1. comme les diamétres de ces cercles directement, & le quarré des temps périodiques inversement ; & leurs poids, à la surface de ces planettes, ou à quelqu'autres distances quelconques de leur centre, sont, par cette présente Proposition, plus grands ou moindres dans la raison doublée inverse des distances. Ainsi, le temps périodique de Venus autour du Soleil étant de 224 jours & 16 heures $\frac{1}{4}$, celui du satellite le plus éloigné de Jupiter autour de cette planette de 16 jours & 16 heures $\frac{8}{15}$, le temps périodique du satellite d'*Hughens* autour de Saturne de 15 jours 22 heures $\frac{2}{3}$, & celui de la Lune autour de la terre de 27 jours 7 heures 43 minutes,

j'ay trouvé, en employant ces temps périodiques, & de plus la distance médiocre de Venus au Soleil, la plus grande élongation héliocentrique du satellite de Jupiter le plus éloigné de cette planette au centre de Jupiter qui est 8′ 16″, celle du satellite d'Hughens au centre de Saturne qui est de 3′ 4″ & celle de la Lune au centre de la terre qui est de 10′ 33″, qu'à égale distance, les poids des corps égaux vers les centres du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la terre, sont comme 1 $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ respectivement; à des distances inégales ces poids varient en raison renversée du quarré des distances: par exemple, les poids des corps égaux sur le Soleil, Jupiter, Saturne & la terre aux distances 10000, 997, 791 & 109 de leurs centres, c'est-à-dire, à leurs superficies, seront comme 10000, 943, 529 & 435 respectivement. On dira dans la suite ce que les corps pésent à la surface de la Lune.

Cor. 2. On connoîtra aussi la quantité de matiére que contient chaque planette. Car les quantités de matiére dans les planettes sont comme leurs forces attractives à égales distances de leurs centres, c'est-à-dire, que les quantités de matiére du Soleil, de Jupiter, de Saturne, & de la terre sont comme 1, $\frac{1}{1067}$ $\frac{1}{3021}$ & $\frac{1}{169282}$ respectivement. Si on trouve la parallaxe du Soleil plus grande ou plus petite que 10″ 30‴, il faudra augmenter ou diminuer la quantité de matiére de la terre en raison triplée.

Cor. 3. On connoîtra aussi les densités des planettes. Car les poids des corps égaux & homogènes aux surfaces des sphères homogènes étant comme leurs diamétres, par la Prop. 72. du Liv. 1. les densités des spheres hétérogènes sont comme ces poids divisés par leurs diamétres. Or on a trouvé que les vrais diamétres du Soleil, de Jupiter, de Saturne, & de la terre, sont l'un à l'autre comme 10000, 997, 791 & 109, & que les poids sur ces planettes étoient comme 10000, 943, 529 & 435 respectivement. Donc leurs densités sont comme 100, 94½ 67, & 400.

La

La densité de la terre que ce calcul donne ne dépend point de la parallaxe du Soleil, mais elle est déterminée par la parallaxe de la Lune, ainsi elle l'est exactement.

Le Soleil est donc un peu plus dense que Jupiter, Jupiter l'est plus que Saturne, & la terre l'est quatre fois plus que le Soleil; ce qu'il faut attribuer à la grande chaleur du Soleil, laquelle raréfie sa matiere. La Lune est plus dense que la terre comme on le verra dans la suite.

Cor. 4. Les planettes sont donc d'autant plus denses, qu'elles sont plus petites, toutes choses égales. Ainsi la force de la gravité à leur surface, approche plus de l'égalité. Les planettes qui sont plus près du Soleil sont aussi plus denses, toutes choses égales, ainsi Jupiter l'est plus que Saturne, & la terre plus que Jupiter. Les planettes devoient donc être placées à différentes distances du Soleil, afin que chacune, à raison de sa densité, fut plus ou moins échauffée par le Soleil. Si la terre étoit placée à l'orbe de Saturne, notre eau seroit perpétuellement gelée, & si la terre étoit dans l'orbe de Mercure, toute l'eau s'évaporeroit dans l'instant. Car la lumiére du Soleil, à laquelle la chaleur est proportionnelle, est sept fois plus dense dans Mercure que sur la terre: & j'ai éprouvé par le Thermométre que lorsque la chaleur étoit sept fois plus forte que celle du Soleil dans notre Eté, elle faisoit bouillir l'eau dans l'instant. Il n'est pas douteux que la matiere de Mercure ne soit proportionnée à la chaleur qu'il éprouve, & que par conséquent elle ne soit plus dense que celle de la terre; car plus la matiére est dense, plus il faut de chaleur pour produire les mêmes effets.

PROPOSITION IX. THÉORÉME IX.

La gravité dans l'intérieur des planettes, décroît à peu près en raison des distances au centre.

Si la matiere de la planette étoit d'une densité uniforme, cette Proposition seroit vraie exactement, par la Prop. 73. du Liv. I.

Ainſi la loi de la peſanteur ne peut s'écarter de la proportion des diſtances que par l'inégalité de la denſité.

PROPOSITION X. THÉORÊME X.

Les mouvemens des planettes peuvent ſe conſerver très-longtemps dans les eſpaces céleſtes.

Dans le ſcholie de la Prop. 40. du Liv. 2. on a fait voir qu'un globe d'eau gelée mû librement dans notre air, perdroit par la réſiſtance de l'air $\frac{1}{4586}$ partie de ſon mouvement en parcourant ſon demi diamétre. La même proportion doit avoir lieu à peu près, dans des globes beaucoup plus grands, & qui ſe mouveroient avec beaucoup plus de vîteſſe que ceux dont on a parlé alors.

Mais le globe de la terre eſt plus denſe que s'il étoit entiérement formé d'eau, ce que je prouve ainſi. Si le globe de la terre étoit d'eau, il y auroit des corps qui ayant moins de gravité ſpécifique ſurnâgeroient & reviendroient d'eux mêmes à la ſuperficie. Et par cette raiſon un globe compoſé de terre qui ſeroit entiérement entouré d'eau, ſurnâgeroit en quelque lieu s'il étoit plus léger que l'eau & cette eau s'amaſſeroit vers le côté oppoſé. Il en eſt de même de notre terre qui eſt en grande partie entourée par la mer. Si elle n'étoit pas plus denſe que l'eau, elle ſurnâgeroit, & ſelon le dégré de ſa légereté ſpécifique elle ſortiroit en partie de l'eau qui ſe ramaſſeroit toute dans les régions oppoſées.

Par le même raiſonnement on doit conclure, que les taches du Soleil ſont plus légeres que la matiére du Soleil ſur laquelle elles nâgent. Et dans la formation d'une planette quelconque qu'on ſuppoſe avoir été originairement fluide, la matiére la plus peſante doit avoir été au centre. Ainſi comme la terre eſt ordinairement à ſa ſurface environ deux fois plus peſante que l'eau, & qu'en fouillant plus avant, elle eſt trois, quatre, & même cinq fois plus denſe : il eſt vraiſemblable qu'il y a envi-



ron cinq ou ſix fois plus de matiére dans le globe de la terre que s'il n'étoit formé que d'eau ; ſurtout puiſqu'on vient de faire voir que la terre eſt environ quatre fois plus denſe que Jupiter. Si donc la matiére de Jupiter eſt un peu plus denſe que l'eau, il eſt clair que dans l'eſpace de trente jours, dans leſquels il parcourt la longueur de 459 de ſes demi diamétres, il ne perdroit que la dixiéme partie environ de ſon mouvement dans un milieu qui ſeroit de la même denſité que notre air. Or comme la réſiſtance des milieux diminue avec leurs poids & leur denſité ; que l'eau, par exemple, qui eſt $13\frac{2}{5}$ fois environ moins denſe que le vif-argent, réſiſte $13\frac{2}{5}$ fois moins que ce fluide ; & que l'air qui eſt 860 fois plus léger que l'eau réſiſte 860 fois moins : dans les cieux, où le poids du milieu dans lequel les planettes ſe meuvent diminue à l'infini, la réſiſtance y doit être preſque nulle.

On a fait voir dans le Scholie de la Prop. 22. Liv. 2. que ſi on montoit à la hauteur de deux cens milles au-deſſus de la ſurface de la terre, la denſité de l'air à cette diſtance, ſeroit à celle de l'air qui nous environne, comme 30 à 0, 000000000000003998, ou comme 750000000000000 à 1 environ. Ainſi la planette de Jupiter, en faiſant ſa révolution dans un milieu de cette denſité, ne perdroit pas en 1000000 ans la $\frac{1}{1000000}$ partie de ſon mouvement par la réſiſtance du milieu. Nous ne connoiſſons que l'air, les exhalaiſons & les vapeurs, qui réſiſtent près de la ſurface de la terre puiſque lorſqu'on les a ôté avec ſoin du récipient d'une machine pneumatique les corps y tombent librement, & ſans éprouver aucune réſiſtance ſenſible ; enſorte que l'or même & une plume très-légere étant jettés enſemble tombent avec une vîteſſe égale, & arrivent en même temps au fond de la machine en tombant de la hauteur de 4, 6 ou 8 pieds. Il eſt donc clair que les planettes pourront ſe mouvoir très-longtemps ſans éprouver de réſiſtance ſenſible dans les eſpaces céleſtes vuides d'air & d'exhalaiſons.



HYPOTHESE PREMIERE.

Le centre du système du monde est en repos.

C'est ce dont on convient généralement, les uns seulement prétendent que la terre est ce centre, & d'autres que c'est le soleil. Voyons ce qui résulte de cette hypothèse.

PROPOSITION XI. THÉORÉME XI.

Le centre commun de gravité du Soleil, de la terre, & de toutes les planettes, est en repos.

Car ce centre, par le Cor. 4. des Loix, ou sera en repos, ou sera mû uniformement en ligne droite. Mais si ce centre avançoit toujours, le centre du monde ne seroit donc pas en repos, ce qui est contre l'hypothèse.

PROPOSITION XII. THÉORÉME XII.

Le Soleil est toujours en mouvement, mais il s'éloigne très-peu du centre commun de gravité de toutes les planettes.

Car puisque, par le Cor. 2. de la Prop. 8. la matiére du Soleil est à la matiére de Jupiter comme 1067 à 1, & que la distance de Jupiter au Soleil est au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu plus grande; le commun centre de gravité du Soleil & de Jupiter tombera dans un point qui sera un peu au-dessus de la surface du Soleil. Par le même raisonnement, la matiére du Soleil étant à la matiére de Saturne comme 3021 à 1, & la distance de Saturne au Soleil étant au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu moindre: le commun centre de gravité de Saturne & du Soleil tombera dans un point qui sera un peu au-dessous de la surface du Soleil. Et en suivant le même calcul on trouvera que si la terre & toutes les planettes étoient placées d'un méme côté du Soleil, le commun centre de gravité de tous ces astres s'éloigneroit à peine du centre du Soleil d'un demi diamétre de cet astre. Comme dans les autres cas la distance entre le centre du Soleil

& le commun centre de gravité eſt encore moindre, & que ce commun centre de gravité eſt toujours en repos. Il arrive que le Soleil, ſelon la différente poſition des planettes, ſe meut ſucceſſivement de tous les côtés, mais il ne s'écarte jamais que très-peu du centre commun de gravité.

Cor. Le commun centre de gravité du Soleil, de la terre, & de toutes les planettes, doit donc être regardé comme le centre du monde. Car la terre, les planettes & le Soleil s'attirant mutuellement, ils ſont toujours en mouvement par la force de leur gravité en vertu des loix du mouvement : ainſi leurs centres mobiles ne peuvent être pris pour le centre du monde, qui doit être en repos. Si le corps vers lequel la gravité entraine plus fortement tous les autres devoit être placé dans ce centre, (comme c'eſt l'opinion vulgaire) ce privilége appartiendroit au Soleil ; mais comme le Soleil ſe meut, il faut choiſir pour le centre commun un point immobile duquel le centre du Soleil s'éloigne très-peu, & duquel il s'éloigneroit encore moins, ſi le Soleil étoit plus grand & plus denſe, car alors il ſeroit mû moins fortement.

PROPOSITION XIII. THÉOREME XIII.

Les planettes ſe meuvent dans des ellipſes qui ont un de leurs foyers dans le centre du Soleil, & les aires décrites autour de ce centre ſont proportionnelles au temps.

Nous avons diſcuté ci-deſſus ces mouvemens d'après les Phénoménes. Les principes des mouvemens une fois connus, donnent les mouvemens céleſtes *à priori.* Ayant donc trouvé que les poids des planettes ſur le Soleil ſont réciproquement comme le quarré de leurs diſtances à ſon centre ; il eſt évident, par les Prop. 1. & 11, & par le Cor. 1. de la Prop. 13. du 1. Livre, que ſi le Soleil étoit en repos, & que les planettes n'agiſſent point mutuellement les unes ſur les autres, tous leurs orbes ſeroient des ellipſes qui auroient le Soleil dans leur foyer commun, & elles décriroient autour de ce foyer des aires proportionnelles au temps. Or les

actions mutuelles des planettes les unes sur les autres sont si foibles qu'elles peuvent être négligées, &, par la Prop. 66. du Liv. 1. elles troublent moins la description de leurs ellipses autour du Soleil lorsqu'on suppose cet astre mobile, que si on le faisoit immobile.

Cependant l'action de Jupiter sur Saturne ne doit pas être absolument négligée : car la gravité vers Jupiter est à la gravité vers le Soleil (à distances égales) comme 1 à 1067 ; donc, dans la conjonction de Jupiter & de Saturne, la distance de Saturne à Jupiter étant à sa distance au Soleil à peu près comme 4 à 9, la gravité de Saturne vers Jupiter sera à sa gravité vers le Soleil comme 81 à 16×1067 ou comme 1 à 211 à peu près. Et delà vient que l'orbe de Saturne est dérangé si sensiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les Astronomes s'en apperçoivent. L'excentricité de cette planette est tantôt augmentée & tantôt diminuée selon sa situation dans ses conjonctions; son aphélie avance quelquefois & quelquefois recule, & son mouvement moyen est tour à tour accéléré & retardé. Cependant tout le dérangement que l'attraction de Jupiter cause dans le mouvement de Saturne autour du Soleil, excepté dans le mouvement moyen, peut presque s'éviter en supposant le foyer inférieur de son orbite placé dans le centre commun de gravité de Jupiter & du Soleil (par la Prop. 67. du Liv. 1.) alors lorsque ce dérangement est le plus grand, il passe à peine deux minutes. Et le plus grand dérangement dans le mouvement moyen surpasse à peine deux minutes par an.

Dans la conjonction de Jupiter & de Saturne les gravités accélératrices du Soleil vers Saturne, de Jupiter vers Saturne & de Jupiter vers le Soleil sont à peu près comme 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ou 156609 : ainsi la différence des gravités du Soleil & de Jupiter vers Saturne est à la gravité de Jupiter vers le Soleil comme 65 à 156609, ou comme 1 à 2409. La plus

grande force de Saturne pour troubler les mouvemens de Jupiter est proportionnelle à cette différence, aussi le dérangement de l'orbe de Jupiter est-il beaucoup moindre que celui de l'orbe de Saturne.

Les dérangemens qu'éprouvent les orbes des autres planettes par leurs actions mutuelles sont beaucoup moins considérables si on en excepte l'orbe de la terre que la Lune dérange sensiblement. Le commun centre de gravité de la terre & de la Lune décrit autour du Soleil une ellipse dont cet astre est le foyer, & dont les aires décrites par ce centre sont proportionnelles au temps : la terre fait sa révolution autour de ce centre commun dans un mois.

PROPOSITION XIV. THÉORÉME XIV.

L'Aphélie & les nœuds des orbites sont en repos.

Les aphélies sont en repos par la Prop. 11. du Liv. 1. & par la première du même livre les plans des orbes sont aussi immobiles, & par conséquent les nœuds. Il faut avouer cependant que les actions des planettes & des cométes les unes sur les autres, peuvent causer quelques inégalités tant dans les aphélies que dans les nœuds, mais ce sont des inégalités assez petites pour qu'il soit permis de les négliger.

Cor. 1. Les étoiles fixes sont aussi en repos, car elles conservent les mêmes positions par rapport aux nœuds & aux aphélies.

Cor. 2. Donc puisque le mouvement annuel de la terre ne leur cause point de parallaxe sensible, leurs forces attractives ne produisent point d'effets sensibles dans la région de notre système à cause de la distance immense de ces corps. Peut-être les étoiles fixes, qui sont également dispersées dans toutes les parties du ciel, détruisent-elles leurs forces mutuelles par leurs attractions contraires, selon la Prop. 70. du Liv. 1.

SCHOLIE.

Comme l'action mutuelle des planettes qui sont le plus près du Soleil, telles que Venus, Mercure, la terre & Mars sont presque insensibles à cause de la petitesse de ces planettes : leurs nœuds & leurs aphélies sont en repos, à l'altération près que peut y apporter l'action de Saturne, de Jupiter & des autres corps placés au-dessus d'elles. En ayant égard à cette altération, on trouve, par la théorie de la gravité, que leurs aphélies se meuvent un peu en conséquence par rapport aux fixes, & cela dans la proportion sesquiplée des distances de ces planettes au Soleil. Ensorte que si l'aphélie de Mars fait 33′ 20″ en cent ans, en conséquence par rapport aux fixes : les aphélies de la terre, de Venus, & de Mercure feront dans le même espace de cent ans 17′ 40″, 10′ 53″ & 4′ 16″ respectivement. Mais on ne fait pas attention dans cette Proposition à ces mouvemens qui sont presque insensibles.

PROPOSITION XV. PROBLÉME I.

Trouver les diamétres principaux des orbes.

Il faut les prendre en raison sesquiplée des temps périodiques, par la Prop. 15 du Liv. 1. Ensuite, par la Prop. 60 du Liv. 1. il faut augmenter le diamétre de chacun des orbes dans la raison qu'il y a entre la masse de la planette ajoutée à celle du Soleil, & la premiere des deux moyennes proportionnelles entre cette somme & le Soleil.

PROPOSITION XVI. PROBLÉME II.

Trouver les excentricités & les aphélies des orbes.

Ce Probléme se résout par la Prop. 18 du Liv. 1.

PROPOSITION

PROPOSITION XVII. THÉORÉME XV.

Les mouvemens diurnes des planettes sont uniformes, & la libration de la Lune vient de son mouvement diurne.

Cela est clair par la premiére loi du mouvement & par le Cor. 22. de la Prop. *66.* Liv. *1.*

Jupiter par rapport aux fixes fait sa révolution diurne en 9 ^{h}. 56′, Mars en 24 ^{h}. 39′, Venus en 23 ^{h}. environ, la terre en 23 ^{h}. 56′, le Soleil en 25 jours $\frac{1}{2}$, & la Lune en 27 jours 7 ^{h}. 43′; c'est ce que les Phénoménes prouvent. Les taches du Soleil revenant sur son disque dans la même situation au bout de 27 j. $\frac{1}{2}$ par rapport à la terre; il faut que le Soleil fasse sa révolution par rapport aux fixes en 25 j. $\frac{1}{2}$ environ. Et comme le jour de la Lune par sa révolution uniforme autour de son axe est d'un mois, sa même face doit regarder toujours la terre à la différence près qui est produite par l'excentricité de son orbite. C'est-là la libration de la Lune en longitude : quant à sa libration en latitude, elle dépend de la latitude de la Lune, & de l'inclinaison de son axe au plan de l'écliptique.

Mercator a amplement expliqué la théorie de cette libration de la Lune d'après mes lettres dans son Astronomie publiée au commencement de l'année *1676.*

Le satellite le plus éloigné de Saturne paroît tourner autour de son axe d'un mouvement semblable, & présenter toujours le même côté à Saturne; car toutes les fois qu'il approche de la partie orientale de l'orbe de cette planette, on le voit à peine, & souvent il disparoît entierement : ce qui peut venir de ce qu'il présente alors à la terre une partie de son disque dans laquelle il se trouve des taches, comme Cassini l'a remarqué.

Le satellite le plus éloigné de Jupiter paroît tourner aussi de même autour de son axe, car il a, dans la partie de son disque opposée à Jupiter, une tache que l'on voit comme si elle étoit dans le disque même de Jupiter, toutes les fois que ce satellite passe entre Jupiter & nos yeux.

PROPOSITION XVIII. THÉORÉME XVI.

Les axes des planettes ſont plus petits que les rayons de leurs équateurs.

Si les planettes n'avoient point le mouvement journalier de rotation autour de leur axe, elles devroient être ſphériques à cauſe de l'égale gravité de leurs parties. Le mouvement de rotation fait que les parties qui s'éloignent de l'axe font effort pour monter vers l'équateur. Et par conſéquent, ſi la matiére dont elles ſont compoſées étoit fluide, ſon élévation vers l'équateur augmenteroit le diamétre de ce cercle, & ſon abbaiſſement vers les Pôles diminueroit l'axe. Auſſi les obſervations aſtronomiques nous apprennent-elles que dans Jupiter le diamétre qui va d'un pôle à l'autre eſt plus court que celui qui va de l'Orient à l'Occident. Par le même raiſonnement, on verra que ſi notre terre n'étoit pas un peu plus haute à l'équateur qu'aux pôles, les mers s'affaiſſant vers les pôles, & s'élevant vers l'équateur inonderoient toutes ces régions.

PROPOSITION XIX. PROBLÉME III.

Trouver la proportion des axes d'une planette.

Norvood, notre compatriote, vers l'année 1635. trouva en meſurant un eſpace de 905751 pieds anglois entre *Londres* & *Yorck*, & en obſervant la différence des latitudes de ces deux villes qui eſt de $2^d\ 28'$, que le dégré avoit 367196 pieds anglois, c'eſt-à-dire, 57300 toiſes *de Paris.*

Picart en meſurant un arc de $1^d\ 22'\ 55''$ dans le méridien entre *Amiens* & *Malvoiſine*, trouva que le dégré avoit 57060 toiſes *de Paris*, *Caſſini* le pere meſura dans le méridien la diſtance entre la ville de *Collioure* en *Rouſſillon* & l'obſervatoire de *Paris* : & ſon fils ajouta à cette meſure celle de la diſtance entre l'obſervatoire de *Paris*, & la tour de *Dunkerque* : la diſtance totale étoit de

486156½ toifes, & la différence des latitudes des villes de *Collioure* & de *Dunkerque* de 8d 31′ 11⅛″, ce qui donne l'arc d'un dégré de 57061 toifes de *Paris*. De ces mefures on conclud la circonférence de la terre de 123249600 pieds *de Paris*, & fon demi diamétre de 19615800 pieds, en fuppofant que la terre foit fphérique.

On a vu ci-deffus que dans la latitude *de Paris* les corps graves en tombant parcourent 15 pieds 1 pouces & 1 7/9 lignes ou 2173 7/9 lignes en une feconde. Mais le poids des corps diminue par le poids de l'air qui les environne; fuppofons que cette diminution foit la $\frac{1}{11000}$e partie du poids total, le corps en tombant dans le vuide parcoureroit 2174 lignes en une feconde.

Un corps qui circuleroit dans un cercle à la diftance de 19615800 pieds du centre, & qui feroit fa révolution uniformement en 23h 56′ 4″ fidérales, décriroit un arc de 1433, 46 pieds en une feconde, le finus verfe de cet arc eft de 0, 0523656 pieds ou de 7, 54064 lignes. Ainfi la force avec laquelle les graves defcendent à la latitude *de Paris*, eft à la force centrifuge des corps fous l'équateur caufée par le mouvement de rotation de la terre, comme 2174 à 7, 54064.

La force centrifuge des corps fous l'équateur, eft à la force centrifuge par laquelle les corps tendent à s'éloigner perpendiculairement de la terre à la latitude de Paris qui eft de 48d 50′ 10″ en raifon doublée du rayon au finus du complement de cette latitude, c'eft-à-dire, comme 7, 54064 à 3, 267. En ajoutant cette force à la force qui fait defcendre les graves à la latitude de Paris, la chute des graves produite à cette latitude par la force totale de la gravité fera dans une feconde de 2177, 267 lignes ou 15 pieds 1 pouce, 5, 267 lignes de Paris. Et la force totale de la gravité dans cette latitude fera à la force centrifuge des corps fous l'équateur comme 2177, 267 à 7, 54064 ou comme 289 à 1.

Si préfentement *APBQ* repréfente la terre non fuppofée fphérique comme auparavant, mais formée par la révolution

d'une ellipſe autour de ſon petit axe *PQ*, & que *ACQqca* ſoit un canal plein d'eau depuis le pôle *Qq* juſqu'au centre *Cc*, & depuis ce centre juſqu'à l'équateur *Aa* : le poids de l'eau dans la branche *ACca* du canal, doit être au poids de l'eau dans l'autre branche *QCcq* comme 289 à 288 à cauſe que la force centrifuge qui vient du mouvement circulaire ſoutient & ôte du poids de l'eau une partie ſur 289 & que par conſéquent les 288 parties d'eau qui ſont dans la branche *ACca* ſoutiennent les 289 de l'autre.

En ſuivant la méthode du Cor. 2. de la Prop. 91. du 1. Livre, je trouve que ſi la terre étoit compoſée d'une matiére homogène, qu'elle fut privée de tout mouvement, & que ſon axe *PQ* fut à ſon diamétre *AB* comme 100 à 101 : la gravité au lieu *Q* de la terre ſeroit à la gravité dans le même lieu *Q* d'une ſphére décrite du centre *C* & du rayon *PC* ou *QC*, comme 126 à 125.

Par le même raiſonnement, on trouvera que la gravité dans le lieu *A* d'un ſphéroïde décrit par la révolution de l'ellipſe *APBQ* autour de ſon axe *AB*, eſt à la gravité au même lieu *A* dans une ſphére décrite du centre *C* & du rayon *AC*, comme 125 à 126. De plus la gravité au lieu *A* de la terre eſt moyenne proportionnelle entre les gravités dans ce ſphéroïde & dans cette ſphére : à cauſe que la ſphére, en diminuant le diamétre *PQ* dans la raiſon de 101 à 100, ſe changeroit dans la figure de la terre ; & que cette figure en diminuant dans la même raiſon le diamétre perpendiculaire aux deux diamétres *AB*, *PQ*, ſe changeroit dans le ſphéroïde décrit par la révolution de l'ellipſe *ABPQ* autour de *AB* ; & dans l'un & l'autre cas, la gravité en *A* diminueroit dans la même raiſon à peu près.

Enfin la gravité en *A* dans la ſphére dont le centre eſt *C* & le rayon *AC*, eſt à la gravité au même lieu *A* ſur la terre, comme 126 à $125\frac{1}{2}$, & la gravité au lieu *Q* dans la ſphére dont le centre eſt *C* & le rayon *QC*, eſt à la gravité au lieu *A* dans la ſphére dont le centre eſt *C* & le rayon *AC*, en raiſon des dia-

métres, (par la Prop. 72. du Liv. 1.) c'est-à-dire, comme 100 à 101. Joignant donc ces trois raisons 126 à 125, 126 à 125½, & 100 à 101, la gravité sur la terre au lieu *Q* sera à la gravité sur la terre au lieu *A*, comme 126 × 126 × 100 à 125 × 125½ × 101, ou comme 501 à 500.

Or, comme (par le Cor. 3. de la Prop. 91. du Liv. 1.) la gravité dans l'un ou l'autre branche *ACca* ou *QCcq* du canal est comme la distance des lieux au centre de la terre; si ces branches sont séparées en parties proportionnelles aux touts par des surfaces transversales & équidistantes, les poids d'un nombre quelconque de parties de l'une de ces branches, seront aux poids d'autant de parties dans l'autre branche en raison composée des quantités de matière & des forces accélératrices, c'est-à-dire, de la raison de 101 à 100 & de celle de 500 à 501, ou, ce qui revient au même, en raison simple de 505 à 501. Donc, si la force centrifuge d'une partie quelconque de la branche *ACca*, laquelle vient du mouvement diurne, étoit au poids de la même partie, comme 4 à 505, ensorte que du poids de cette partie divisée en 505, sa force centrifuge en ôtât 4; les poids seroient égaux dans l'une & l'autre branche, & par conséquent le fluide resteroit en équilibre.

Mais la force centrifuge d'une partie quelconque est au poids de cette même partie comme 1 à 289, c'est-à-dire, que la force centrifuge qui devroit être la $\frac{4}{505}$e partie du poids n'en est que la $\frac{1}{289}$e partie, ainsi on peut dire, par une simple analogie, si la force centrifuge $\frac{4}{505}$ fait que la hauteur de l'eau dans la branche *ACca* surpasse la hauteur de l'eau dans la branche *QCcq* d'une centiéme partie de toute la hauteur: la force centrifuge $\frac{1}{289}$ fera que l'excès de la hauteur dans la branche *ACca* ne sera que $\frac{1}{229}$e partie de la hauteur de l'eau dans l'autre branche *QCcq*. Et le diamétre de la terre qui passe par ses pôles sera au diamétre de l'équateur comme 229 à 230. Ainsi, comme le demi diamétre médiocre de la terre est, selon la mesure de *Picart*, de

19615800 pieds de Paris, ou de 3923, 16 milles, (supposé que le mille soit de 5000 pieds) la terre sera plus haute à l'équateur qu'aux pôles de 85472 pieds, ou de $17\frac{1}{10}$ milles, & sa hauteur à l'équateur sera de 19658600 pieds environ, & de 19573000 aux pôles.

Si la planette est plus petite, ou plus grande que la terre, mais que sa densité, & le temps périodique de sa révolution diurne soient les mêmes, la proportion de la force centrifuge à la gravité demeurera la même, & par conséquent la proportion entre l'axe & le diamétre de l'équateur sera aussi la même.

Mais si le mouvement diurne est accéléré ou retardé dans une raison quelconque, il augmentera ou diminuera la force centrifuge dans la raison doublée de cette raison, & par conséquent la différence des diamétres augmentera ou diminuera dans cette même raison doublée à peu près. Si la densité de la planette augmente ou diminue dans une raison quelconque, la gravité vers cette planette augmentera ou diminuera dans la même raison. Mais la différence des diamétres diminuera au contraire en raison de l'augmentation de la gravité, ou augmentera en raison de la diminution de la gravité. Ainsi comme la terre fait sa révolution en $23^h\ 56'$ & Jupiter en $9^h\ 56'$, par rapport aux fixes, & que par conséquent les quarrés des temps sont comme 29 à 5, & les densités comme 400 à $94\frac{1}{2}$: la différence des diamétres de Jupiter sera à son petit diamétre comme $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ à 1, ou comme 1 à $9\frac{1}{3}$ à peu près. Le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident est donc à son diamétre entre les pôles comme $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$ à peu près. Donc, puisque son plus grand diamétre est de $37''$, son petit diamétre entre ses pôles sera de $33''\ 25'''$ & ajoutant $3''$ à peu près pour la lumiére erratique, les diamétres apparens de cette planette seront de $40''$ & $36''\ 25'''$ à peu près : c'est-à-dire, qu'ils seront l'un à l'autre comme $11\frac{1}{6}$ à $10\frac{1}{6}$ à peu près. Mais ce rapport ne doit avoir lieu qu'en supposant toute

la matiére de Jupiter d'une égale denſité; car ſi elle étoit plus denſe vers le plan de l'équateur que vers les pôles, ſes diamétres pourroient être l'un à l'autre comme 12 à 11, ou comme 13 à 12, ou même comme 14 à 13. Caſſini a obſervé dans l'année 1691. que le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident ſurpaſſoit ſon autre diamétre environ d'une de ſes quinziémes parties. Notre compatriote *Pound* avec un téleſcope de 123 pieds & un excellent Micrométre, ayant meſuré les diamétres de Jupiter en 1719. les trouva tels qu'ils ſont marqués dans la table ſuivante.

Temps.			*Grand diamétre.*	*Petit diamétre.*	*Différence des diamétres entr'eux.*
	Jours	*Heures*	*Parties*	*Parties*	
Janv.	28	6	13, 40	12, 28	*comme* 12 à 11
Mars	6	7	13, 12	12, 20	$13\frac{3}{4}$ à $12\frac{3}{4}$
Mars	9	7	13, 12	12, 08	$12\frac{2}{3}$ à $11\frac{2}{3}$
Avril	9	9	12, 32	11, 48	$14\frac{1}{2}$ à $13\frac{1}{2}$

Cette théorie s'accorde avec les Phénoménes; car l'équateur des planettes étant beaucoup plus expoſé que les autres parties à l'action du Soleil, la matiére qui y eſt, pour ainſi dire, plus cuite doit y être plus denſe que vers les pôles.

Que la gravité diminue ſous l'équateur par la rotation diurne de notre terre, & que parconſéquent elle doive être plus élevée vers l'équateur qu'aux pôles, (ſi ſa matiére eſt d'une denſité uniforme) c'eſt ce qui paroîtra clairement par les expériences des pendules que je vais rapporter dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XX. PROBLEME IV.

Trouver & comparer entr'eux les poids des corps dans les diverſes régions de la terre.

Comme les poids de l'eau renfermée dans les branches inégales du canal *ACQqca* ſont égaux; & que les poids de ſes parties, qui ſont proportionnelles aux branches, & ſituées de même dans leur totalité, ſont entr'eux comme les poids entiers,

& que par conſéquent ils ſont égaux entr'eux ; les poids des parties égales & également ſituées dans ces branches, ſeront réciproquement comme ces branches, c'eſt-à-dire, comme 230 à 229. Il en eſt de même de tous les corps quelconques homogènes égaux, & qui ſeront ſituées ſemblablement dans les branches de ce canal ; leurs poids ſeront réciproquement comme ces branches, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les diſtances de ces corps au centre de la terre. C'eſt pourquoi, les poids des corps ſitués dans les parties ſupérieures de ces canaux, ou à la ſurface de la terre, ſeront entr'eux réciproquement comme leur diſtance à ſon centre. Par le même raiſonnement, les poids, dans quelque région de la terre que ce ſoit, ſont réciproquement comme les diſtances des lieux au centre de la terre ; & par conſéquent, en ſuppoſant que la terre ſoit un ſphéroïde, leur proportion eſt donnée.

On tire de-là ce théorème, que l'augmentation du poids, en allant de l'équateur vers les pôles, doit être à peu près comme le ſinus verſe du double de la latitude, ou, ce qui eſt la même choſe, comme le quarré du ſinus droit de la latitude. Les arcs des dégrés de latitude augmentent à peu près dans la même raiſon dans le méridien. Ainſi la latitude de Paris étant de $48^d\ 50'$, celle des lieux ſitués ſous l'équateur de $00^d\ 00'$, & celle des lieux ſitués aux pôles de 90^d, les ſinus verſes des arcs doubles étant par conſéquent de 11334, 00000, & 20000, pour le rayon de 10000 ; & la gravité aux pôles étant à la gravité ſous l'équateur comme 230, à 229, ou, ce qui revient au même, l'excès, de la gravité aux pôles étant à la gravité ſous l'équateur comme 1 à 229 : on trouvera que l'excès de la gravité dans la latitude de Paris, eſt à la gravité ſous l'équateur, comme $1 \times \frac{11334}{20000}$ à 229, ou comme 5667 à 2290000. Donc les gravités totales dans ces lieux, ſeront l'une à l'autre comme 2295667 à 2290000. Or comme les longueurs des pendules qui font leurs oſcillations en temps égaux, ſont en raiſon directe des gravités, & qu'à la latitude de Paris la longueur du pendule qui bat les ſecondes eſt de 3 pieds de Paris

Paris 8½ lignes, ou plûtôt de 3 pieds 8⅚ lignes, à cause du poids de l'air : la longueur du pendule sous l'équateur sera moindre que la longueur du pendule synchrone à la latitude de Paris. Et cette différence sera d'une ligne & 87 milliémes de lignes. C'est par un semblable calcul qu'on a dressé la table suivante.

Latitude du lieu.	*Longueur du Pendule.*		*Mesure d'un dégré du Méridien.*
Dégrés.	*Pieds.*	*Lignes.*	*Toises.*
0	3	7, 468	56637
5	3	7, 482	56642
10	3	7, 526	56659
15	3	7, 596	56687
20	3	7, 692	56724
25	3	7, 812	56769
30	3	7, 948	56823
35	3	8, 099	56882
40	3	8, 261	56945
1	3	8, 294	56958
2	3	8, 327	56971
3	3	8, 361	56984
4	3	8, 394	56997
45	3	8, 428	57010
6	3	8, 461	57022
7	3	8, 494	57035
8	3	8, 528	57048
9	3	8, 561	57061
50	3	8, 594	57074
55	3	8, 756	57137
60	3	8, 907	57196
65	3	9, 044	57250
70	3	9, 162	57295
75	3	9, 258	57332
80	3	9, 329	57360
85	3	9, 372	57377
90	3	9, 387	57382

On voit par cette table que l'inégalité des dégrés est si petite, que dans la géographie on peut supposer la terre sphérique : surtout si la matiére est plus dense vers l'équateur que vers les pôles.

Quelques Astronomes envoyés dans des régions fort éloignées pour faire des observations astronomiques, observerent que le mouvement des horloges à pendule étoit plus lent vers l'équateur que dans nos pays. M. *Richer* fut le premier qui fit cette observation dans l'Isle de *Cayenne* en 1672. En observant au mois d'Août le passage des fixes par le méridien, il trouva que sa pendule retardoit sur le moyen mouvement du Soleil, & que la différence par jour étoit de 2′ 28″. Ensuite ayant fait osciller un pendule simple ensorte que ses vibrations fussent isochrones à celles de sa pendule qui étoit excellente, il détermina la longueur du pendule simple, & il répéta ses expériences plusieurs fois chaque semaine pendant 10 mois. Etant ensuite retourné en France il compara la longueur de ce pendule avec celle du pendule qui bat les secondes à Paris (lequel avoit 3 pieds de Paris & 8 lignes $\frac{3}{5}$) & il trouva que le pendule sous l'équateur étoit plus court qu'à Paris d'une ligne & un quart de ligne.

Depuis ce temps, *Halley* notre compatriote trouva vers l'année 1677. qu'à l'isle de *Sainte Hélene* le mouvement de sa pendule étoit plus lent qu'à *Londres*, il n'en détermina pas la différence, mais il racourcit son pendule de plus de la huitiéme partie d'un pouce, c'est-à-dire, d'une ligne & demie. Pour faire cette opération, comme la longueur de la vis vers le bas du pendule n'étoit pas suffisante, il mit un anneau de bois à la boëte de la vis, & il y suspendit le poids du pendule.

Ensuite dans l'année 1682. MM. *Varin & Deshayes* déterminerent la longueur du pendule qui bat les secondes à l'Observatoire de *Paris*, de 3 pieds de Paris 8 lignes & $\frac{5}{9}$, & dans l'Isle de *Gorée* ils trouverent par la même méthode que la longueur du pendule synchrone étoit de 3 pieds 6 lignes & $\frac{5}{9}$, ainsi la différence étoit de deux lignes. La même année, aux isles de la *Guadaloupe* & de la *Martinique*, ils trouverent la longueur du pendule synchrone de 3 pieds 6 lignes $\frac{1}{2}$.

M. *Couplet le fils* en 1697. au mois de Juillet, régla sa pendule

fur le moyen mouvement du Soleil à l'obſervatoire de Paris, enſorte que pendant ûn temps aſſez long, elle s'accordoit parfaitement avec le mouvement du Soleil, & étant à *Lisbonne* au mois de Novembre ſuivant il trouva que cette même pendule retardoit, & que la différence étoit de 2′ 13″ en 24 heures. Au mois de Mars ſuivant, il trouva qu'à *Paraïbe* son horloge retardoit ſur *Paris* de 4′ 12″ en 24 heures. Et il aſſure que le pendule qui battoit les ſecondes à *Lisbonne* étoit plus court que celui qui les battoit à *Paris* de 2 lignes $\frac{1}{2}$ & que celui qui les battoit à *Paraïbe* étoit plus court que celui qui les battoit à *Paris* de 3 lignes $\frac{2}{3}$. Il auroit déterminé plus exactement ces différences s'il eût fait celle de *Lisbonne* de 1 ligne $\frac{1}{3}$ & celle de *Paraïbe* de 2 lignes $\frac{5}{9}$, car ces différences répondent reſpectivement à 2′ 13″ & à 4′ 12″ qui ſont les différences qu'il avoit remarquées entre les temps marqués par ſon horloge, ainſi on ne doit pas beaucoup ajouter de foi à ces obſervations groſſiéres.

Les années ſuivantes, c'eſt-à-dire, en 1699. & en 1700. M. *Deshayes* étant de nouveau en Amérique, détermina la longueur du pendule qui bat les ſecondes dans les iſles de *Cayenne* & de *Grenade* un peu moindre de 3 pieds 6 lignes $\frac{1}{2}$. Dans l'iſle de *S. Chriſtophe*, il trouva cette longueur de 3 pieds 6 lignes $\frac{3}{4}$. Et dans l'iſle de *S. Domingue* de 3 pieds 7 lignes.

En l'année 1704. le P. *Feuillée* trouva à *Portobello* en Amérique, la longueur du pendule qui bat les ſecondes de 3 pieds de Paris, 5 lignes & $\frac{7}{12}$, c'eſt-à-dire, près de 3 lignes moindre qu'à Paris, mais il dût y avoir de l'erreur dans ſon obſervation, car étant allé enſuite à la *Martinique*, il trouva que la longueur du pendule iſochrone n'étoit que trois pieds de Paris 5 lignes & $\frac{10}{12}$e.

Or la latitude méridionale de *Paraïbe* eſt de 6d 38′, la latitude ſeptentrionale de *Portobello* de 9d 33′, & les latitudes ſeptentrionales des iſles de *Cayenne*, de *Gorée*, de la *Guadaloupe*, de la *Martinique*, de *Grenade*, de *S. Chriſtophe*, & de *S. Domingue*, ſont reſpectivement de 4d 55′, 14d 40′, 14d 00′, 14d

44′, 12ᵈ 6′, 17ᵈ 19′, & de 19ᵈ 48′; & les excès de la longueur du pendule de Paris ſur les longueurs des pendules iſochrones obſervées dans ces latitudes, ſont un peu plus grands que ne les donne la table des longueurs du pendule calculée ci-deſſus. Ainſi la terre doit être un peu plus élevée à l'équateur que ce calcul ne l'a donné, & ſa matiére doit être plus denſe à ſon centre que près de la ſuperficie, ſuppoſé cependant que la chaleur de la Zone torride n'ait pas un peu augmenté la longueur du pendule.

M. *Picart* a obſervé qu'une barre de fer, qui pendant la gelée étoit longue d'un pied, devenoit, étant échauffée par le feu, d'un pied & un quart de ligne. Et M. *de la Hire* a remarqué depuis, qu'une barre de fer qui avoit ſix pieds pendant l'hyver, devenoit de ſix pieds & $\frac{2}{3}$ de ligne lorſqu'elle étoit expoſée au Soleil de l'Eté.

Dans le premier cas, la chaleur fut plus grande que dans le ſecond, & dans celui-ci la chaleur fut plus grande que celle des parties externes du corps humain, car les métaux acquerrent une grande chaleur lorſqu'ils ſont expoſés au Soleil de l'Eté. Mais le pendule d'une horloge n'eſt jamais expoſé au Soleil de l'Eté, & n'atteint même jamais la chaleur des parties externes du corps humain. Ainſi le pendule de l'horloge dont la longueur étoit de trois pieds, n'a jamais pu devenir plus long l'Eté que l'Hyver, que d'un quart de ligne, & par conſéquent on ne peut attribuer les différences qui ſe trouvent entre les longueurs des pendules iſochrones en différentes régions à la différente chaleur des climats. Elle ne peut être attribuée non plus aux erreurs gliſſées dans les obſervations des Aſtronomes françois, car quoiqu'elles ne s'accordent pas parfaitement entr'elles, cependant les différences ſont ſi petites qu'on peut les négliger. Ces obſervations s'accordent toutes à donner les pendules iſochrones plus courts vers l'équateur qu'à l'obſervatoire de Paris, & ſelon toutes ces obſervations, cette différence n'eſt pas moindre que

d'une ligne & un quart, & elle ne passe pas 2 lignes $\frac{1}{3}$.

Dans les observations de M. *Richer* à *Cayenne*, la différence fut d'une ligne & un quart, dans celle de M. *Deshayes* la différence corrigée fut d'une ligne & demie, ou d'une ligne trois quarts, dans les autres observations qui sont moins éxactes elle étoit environ de deux lignes; & ces différences doivent être attribuées, partie aux erreurs commises dans les observations, partie à la dissemblance des parties internes de la terre, & à la différente hauteur des montagnes, & partie enfin à la différente température de l'air.

Une barre de fer longue de trois pieds est plus courte en Angleterre l'Hyver que l'Eté de la sixiéme partie d'une ligne, autant que j'en puis juger; ainsi ôtant cette différence causée par la chaleur, d'une ligne & un quart, qui est la différence trouvée par M. *Richer*, il restera toujours une différence de $1\frac{1}{12}$ ligne, qui approche assez de $1\frac{87}{1000}$ trouvée ci-dessus par la théorie. *Richer* répéta ses observations à la *Cayenne* toutes les semaines pendant 10 mois, & il compara les longueurs du pendule à *Cayenne* avec les longueurs du même pendule en France déterminées de même. Les autres observateurs n'avoient point fait leurs observations avec tant de soin & de précaution, si donc on regarde les observations de M. *Richer* comme éxactes, il s'ensuivra que la terre doit être plus haute à l'équateur qu'aux pôles de 17 milles environ, comme la théorie précédente l'a donné.

PROPOSITION XXI. THÉORÉME XVII.

Les points équinoxiaux rétrogradent, & l'axe de la terre, à chaque révolution annuelle, a une nutation par laquelle il s'incline deux fois vers l'écliptique & retourne deux fois à sa premiere position.

C'est ce qui est prouvé par le Cor. 20. de la Prop. 66. du Liv. 1. mais ce mouvement de nutation doit être très-foible, & on peut à peine s'en appercevoir.

PROPOSITION XXII. THÉORÊME XVIII.

Tous les mouvemens de la Lune, & toutes ses inégalités sont une suite & se tirent des principes qu'on a posés ci-dessus.

Pendant que les grandes planettes sont portées autour du Soleil, elles peuvent emporter dans leur révolution d'autres planettes plus petites, qui tournent autour d'elles dans des ellipses dont le foyer est placé dans le centre des grandes planettes, ce qui est clair par la Prop. 65. du Liv. 1. Les mouvemens de ces petites planettes, doivent être troublés de plusieurs façons par l'action du Soleil qui doit causer des inégalités dans leur mouvement telles qu'on en remarque dans notre Lune; car dans les syzygies cette planette (selon les Cor. 2. 3. 4. & 5. de la Prop. 66.) se meut plus vîte & décrit autour de la terre des aires plus grandes en temps égaux que dans les quadratures, & alors elle parcourt un orbe moins courbe, & approche par conséquent plus près de la terre, à moins que son mouvement excentrique ne fasse un effet contraire. Car l'excentricité de la Lune est la plus grande (par le Cor. 9. de la Prop. 66.) lorsque son apogée est dans les syzygies, & elle est la moindre lorsque l'apogée est dans les quadratures; ensorte que la Lune va plus vîte & est plus près de la terre dans son périgée; & elle va plus lentement, & est plus loin de nous dans son apogée, lorsqu'elle est dans les syzygies que lorsqu'elle est dans les quadratures. De plus, l'apogée avance, & les nœuds rétrogradent, mais d'un mouvement inégal : l'apogée (par les Cor. 7. & 8. de la Prop. 66.) avance plus vîte dans ses syzygies, & rétrograde plus lentement dans ses quadratures, & l'excès du mouvement progressif sur la rétrogradation se fait, pour l'année entiere, en conséquence. Mais les nœuds (par le Cor. 2. de la Prop. 66.) sont en repos dans leurs syzygies, & rétrogradent très-vîte dans leurs quadratures. Quant à la plus grande latitude de la Lune, elle est plus grande dans ses quadratures (par le Cor. 10. de la Prop. 66.) que dans ses syzygies : & le

moyen mouvement eſt plus lent dans le périhélie de la terre (par le Cor. 6. de la Prop. 66.) que dans ſon aphélie. Ce ſont là les inégalités les plus remarquables que les Aſtronomes ayent obſervées dans le mouvement de la Lune.

Il y en a encore quelques-unes qui n'avoient pas été obſervées par les premiers Aſtronomes, & qui troublent tellement les mouvemens lunaires, que juſqu'à-préſent, on n'avoit pu les réduire à aucune régle certaine. Telles ſont les vîteſſes ou les mouvemens horaires de l'apogée & des nœuds de la Lune, & leurs équations, ainſi que la différence entre la plus grande excentricité dans les ſyzygies & la plus petite dans les quadratures, & l'inégalité qu'on appelle variation; toutes ces quantités augmentent & diminuent annuellement (par le Cor. 14. de la Prop. 66.) en raiſon triplée du diamétre apparent du Soleil. De plus, la variation augmente ou diminue à peu près en raiſon doublée du temps qui s'écoule entre les quadratures (par les Cor. 1. & 2. du Lemme 10. & le Cor. 16. de la Prop. 66. Liv. 1.) mais cette inégalité eſt ordinairement rapportée dans le calcul aſtronomique à la proſthaphérèſe de la Lune, & eſt confondue avec elle.

PROPOSITION XXIII. PROBLÉME V.

Les inégalités des mouvemens des ſatellites de Jupiter & de Saturne peuvent ſe déduire des mouvemens de la Lune.

On peut déduire des mouvemens de notre Lune les mouvemens analogues des Lunes ou des ſatellites de Jupiter, & cela en cette ſorte.

Par le Cor. 16. de la Prop. 66. du Liv. 1. le mouvement moyen des nœuds du ſatellite le plus éloigné de Jupiter eſt au mouvement moyen des nœuds de notre Lune, en raiſon compoſée de la raiſon doublée du temps périodique de la terre autour du Soleil, au temps périodique de Jupiter autour du Soleil, & de la raiſon ſimple du temps périodique de ce ſatellite autour

de Jupiter au temps périodique de la Lune autour de la terre; ainsi en cent ans les nœuds du dernier satellite de Jupiter seront $8^{d}\ 24'$ en antécédence.

Par le même corollaire, les mouvemens moyens des nœuds des satellites intérieurs sont au mouvement des nœuds de ce dernier satellite comme les temps périodiques de ces satellites intérieurs au temps périodique du satellite extérieur, ainsi ils sont donnés.

Il suit encore du même Corollaire que le mouvement en conséquence de l'apside la plus haute d'un satellite est au mouvement de ses nœuds en antécédence, comme le mouvement de l'apogée de notre Lune au mouvement de ses nœuds, & il est par conséquent donné.

Le mouvement de la plus haute apside ainsi trouvé, doit être diminué dans la raison de 5 à 9 ou de 1 à 2 à peu près, pour une raison qu'il n'est pas à propos d'expliquer ici.

Les plus grandes équations des nœuds, & de l'apside la plus haute d'un satellite quelconque sont, à peu près, aux plus grandes équations des nœuds & de l'apside la plus haute de la Lune, respectivement, comme le mouvement des nœuds & de l'apside la plus haute des satellites dans le temps d'une révolution des premieres équations, au mouvement des nœuds & de l'apogée de la Lune dans le temps d'une révolution des dernières équations.

La variation d'un satellite, telle qu'on l'observeroit de Jupiter, est à la variation de la Lune comme sont entr'eux les mouvemens entiers des nœuds pendant les temps pendant lesquels ce satellite & la Lune font leur révolution autour du Soleil, par le même Cor. Ainsi dans le satellite le plus éloigné de Jupiter elle ne passe pas $5''\ 12'''$.

PROPOSITION

PROPOSITION XXIV. THÉORÉME XIX.

Le flux & le reflux de la mer sont causés par les actions de la Lune & du Soleil.

Par les Cor. 19. & 20. de la Prop. 66. du premier Livre, on voit que la mer doit s'abbaisser & s'élever deux fois chaque jour tant solaire que lunaire, & que la plus grande élévation de l'eau dans les mers libres & profondes, doit suivre le passage de l'astre par le méridien du lieu dans un espace de temps moindre que six heures. C'est en effet ce qui arrive dans la mer Atlantique & d'Ethiopie, & dans tout le trajet qui est entre la France & le Cap de bonne Espérance vers l'Orient, ainsi que dans la mer Pacifique sur les rivages du Chili & du Pérou : car dans toutes ces côtes les marées arrivent vers la 2, 3, ou quatriéme heure, excepté que dans les lieux où l'eau rencontre beaucoup de sables, la marée retarde jusqu'à la 5, 6 & septiéme heure, & quelquefois au de-là. Je compte les heures depuis le passage de l'un & de l'autre astre par le méridien du lieu tant au-dessus qu'au-dessous de l'horison, & par les heures du jour lunaire j'entends la vingt-quatriéme partie du temps que la Lune employe dans son mouvement diurne apparent à revenir au méridien du lieu.

La plus grande force du Soleil ou de la Lune, pour élever les eaux de la mer, se trouve dans le moment même qu'ils atteignent le méridien du lieu. Cette force qu'ils impriment alors à la mer y subsiste pendant un certain temps, & s'augmente par la force nouvelle qui lui est ensuite imprimée, jusqu'à ce que la mer soit parvenue à sa plus grande hauteur, ce qui arrive dans l'espace d'une heure, de deux heures, & le plus souvent dans celui de trois heures environ vers les rivages, ou même dans un temps plus long, si la mer a beaucoup de bancs.

Les deux mouvemens que ces deux astres excitent, ne peuvent pas être apperçus chacun à part, mais il s'en compose un

mouvement mixte. Dans la conjonction ou l'opposition de ces astres, leurs actions conspirent & causent le plus grand flux & le plus grand reflux. Dans les quadratures, le Soleil éleve l'eau lorsque la Lune l'abbaisse, & il l'abbaisse lorsque la Lune l'éleve; & la marée étant l'effet de la différence de ces actions opposées, elle est alors la plus petite. Or comme l'expérience fait voir que la Lune fait plus d'effet sur la mer que le Soleil, la plus grande hauteur de l'eau arrive, à peu près, à la troisiéme heure lunaire.

Hors des syzygies & des quadratures, la plus grande hauteur de l'eau devroit toujours arriver à la troisiéme heure lunaire par la seule action de la Lune, & à la troisiéme heure solaire par la seule action du Soleil; & par ces actions composées elle arrive à un temps intermédiaire, mais qui est plus près de la troisiéme heure lunaire que de la troisiéme heure solaire; ainsi dans le passage de la Lune des syzygies aux quadratures, où la troisiéme heure solaire précede la troisiéme heure lunaire, la plus grande hauteur de l'eau précede aussi la troisiéme heure lunaire, & elle la précede d'un intervalle qui est le plus grand un peu après les octans de la Lune; dans le passage des quadratures aux Syzygies c'est le contraire, la plus haute marée suit la troisiéme heure lunaire avec des intervalles égaux à ceux avec lesquels elle l'avoit précédée.

Telles sont les loix du flux & du reflux dans les mers libres, mais aux embouchures des fleuves, les plus grandes hauteurs de l'eau arrivent plus tard, toutes choses d'ailleurs égales.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent de leurs distances de la terre; car dans leurs moindres distances ils font de plus grands effets, & dans leurs plus grandes distances leurs effets sont moindres, & cela en raison triplée de leurs diamétres apparens. Ainsi le Soleil étant l'hyver dans son périgée, il fait plus d'effet sur la mer, & par conséquent, toutes choses égales, les marées sont un peu plus hautes dans les syzygies, &

un peu moindres dans les quadratures, en Hyver qu'en Eté ; & la Lune étant chaque mois dans son périgée, les marées sont plus grandes alors que 15 jours devant ou 15 jours après qu'elle est dans son apogée. Par ces deux causes il arrive que dans deux syzygies continues les deux plus grandes marées ne se suivent pas exactement.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent aussi de la déclinaison de ces astres, ou de leur distance de l'équateur ; car si l'astre étoit dans le pôle, il attireroit d'une maniére constante toutes les parties de l'eau, sans que son action fut augmentée ni diminuée, & par conséquent elle n'exciteroit aucun mouvement de réciprocation. Donc ces astres s'éloignant de l'équateur vers le pôle, leurs effets doivent diminuer peu à peu, & par conséquent ils doivent causer de moindres marées dans leurs syzygies solsticiales que dans leurs syzygies équinoxiales. Dans leurs quadratures solsticiales elles doivent, au contraire, être plus grandes que dans leurs quadratures équinoxiales ; parce que les effets de la Lune, qui est alors dans l'équateur, surpassent beaucoup ceux du Soleil : ainsi les plus grandes marées arrivent dans les syzygies, & les moindres dans les quadratures de ces astres, vers les temps de l'équinoxe de l'un & de l'autre ; & la plus grande marée dans les syzygies est toujours accompagnée de la plus petite dans les quadratures, comme l'expérience le fait voir.

Le Soleil étant moins éloigné de la terre en Hyver qu'en Eté, les plus grandes & les plus petites marées précedent plus souvent l'équinoxe du Printemps qu'elles ne le suivent, & elles suivent plus souvent l'équinoxe d'Automne qu'elles ne le précedent.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent encore de la latitude des lieux. Que *ApEP* représente la terre couverte de toutes parts par une mer très-profonde ; que *C* soit son centre ; *P* & *p* ses pôles ; *AE* son équateur ; *F* un lieu quelconque de la terre pris hors de l'équateur ; *Ff* le parallele Fig. 2.

Fig. 2.

de ce lieu ; *D d* le parallele qui lui répond de l'autre côté de l'équateur ; *L* le lieu où la Lune étoit trois heures auparavant ; *H* le lieu de la terre qui y répond perpendiculairement ; *h* le lieu opposé à celui-là ; *K*, *k* les lieux qui en sont distans de 90^{d} ; *CH*, *Ch* les plus grandes hauteurs de la mer mesurées du centre de la terre ; & *CK*, *Ck* ses plus petites hauteurs : si sur les axes *Hh*, *Kk* on décrit une ellipse, cette ellipse par sa révolution autour de son grand axe *Hh* décrira un sphéroïde *HPKhpk* ; lequel représentera à peu près la figure de la mer, & *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* seront les hauteurs de la mer aux lieux *F*, *f*, *D* & *d*. De plus, si dans la révolution de l'ellipse dont on vient de parler, un point quelconque *N* décrit un cercle *MN*, lequel coupe les paralleles *Ff*, *Dd* dans les lieux quelconques *R* & *T* & l'équateur *AE* en *S* ; *CN* sera la hauteur de la mer dans tous les lieux *R*, *S*, *T*, situés dans ce cercle. Ainsi dans la révolution diurne d'un lieu quelconque *F*, l'élévation des eaux sera la plus grande en *F*, la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien sur l'horison ; & leur plus grand abbaissement sera en *Q* la troisiéme heure après le coucher de la Lune ; ensuite la plus grande élévation sera en *f* la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien sous l'horison ; & enfin le plus grand abbaissement en *Q* la troisiéme heure après le lever de la Lune ; & la derniére élévation des eaux en *f* sera moindre que la premiere en *F*.

Supposons toute la mer séparée en deux flots hémisphériques, l'un boréal dans l'hémisphére *KHk*, & l'autre austral dans l'hémisphére opposé *Khk* ; ces flots étant toujours opposés l'un à l'autre viennent tour à tour au méridien de chaque lieu de la terre dans l'intervalle de 12 heures lunaires. Mais comme les régions boréales participent plus du flux boréal, & les australes du flux austral, il doit s'en composer des marées qui seront alternativement plus grandes & moindres dans chacun des lieux hors de l'équateur, dans lesquels le Soleil & la Lune se levent &

ſe couchent. Ainſi la plus grande marée, lorſque la Lune décline vers le Zenith du lieu, tombera à peu près à la troiſiéme heure après le paſſage de la Lune au méridien ſur l'horiſon ; & la déclinaiſon de la Lune changeant, cette plus grande marée deviendra la plus petite. La plus grande différence de ces marées tombera dans le temps des ſolſtices ; ſurtout ſi le nœud aſcendant de la Lune ſe trouve dans le premier point d'Aries. C'eſt ce qui eſt conforme à l'expérience, car en hyver les marées du matin ſont plus grandes que celles du ſoir, & en Eté celles du ſoir ſurpaſſent celles du matin. A *Plimouth* cette différence va preſque à un pied, & à *Briſtol* elle va à 15 pouces : comme l'ont obſervé *Colepreſſius & Sturmius.*

Les mouvemens de la mer dont j'ai parlé juſqu'à préſent ſont un peu altérés par cette force de réciprocation des eaux, par laquelle le flux pourroit ſubſiſter quelque temps quoique les actions du Soleil & de la Lune ſur la mer vinſſent à ceſſer. Cette conſervation du mouvement une fois imprimé diminue la différence des marées alternatives ; & elle rend les marées plus grandes immédiatement après les ſyzygies, & plus petites immédiatement après les quadratures. C'eſt pourquoi les marées alternatives à *Plimouth* & à *Briſtol* ne différent pas entr'elles beaucoup plus que d'un pied ou de 15 pouces ; en ſorte que les plus grandes marées dans ces ports ne ſont pas les premieres après les ſyzygies, mais les troiſiémes.

Tous ces mouvemens ſont retardés lorſque les eaux de la mer paſſent ſur des bas fonds, ainſi les plus grandes marées dans les détroits & dans les embouchures des fleuves, ne ſont que le quatriéme ou même le cinquiéme jour après les ſyzygies.

De plus, il ſe peut faire que le flux ſe propage de l'océan par pluſieurs détroits juſqu'au même port, & qu'il paſſe plus vîte par quelques-uns de ces détroits que par les autres : d'où il arrive que le même flux étant diviſé en deux ou pluſieurs flux qui arrivent ſucceſſivement, il peut compoſer de nouveaux mouvemens de différens genres. Suppoſons deux flux égaux qui arrivent

de deux endroits différens dans le même port, & dont l'un précéde l'autre de six heures, & tombe dans la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien de ce port; si la Lune, lorsqu'elle arrive à ce méridien, étoit dans l'équateur, il y auroit toutes les six heures des flux qui seroient contrebalancés par des reflux égaux & l'eau seroit stagnante pendant tout l'espace de ce jour-là; mais si la Lune déclinoit alors, les marées seroient tour à tour plus grandes & moindres dans l'océan, comme on l'a dit; & elles se propageroient de l'océan dans ce port deux à deux; ainsi il y arriveroit deux marées fortes & deux marées foibles tour à tour. Les deux marées fortes feroient que l'eau acquéreroit sa plus grande hauteur dans le milieu entre l'une & l'autre, la marée forte & la marée foible feroient que l'eau acquéreroit sa hauteur moyenne entre ces deux marées, & entre les deux marées foibles l'eau monteroit à sa moindre hauteur. Ainsi dans l'espace de 24 heures l'eau n'acquéreroit pas deux fois, comme il arrive ordinairement, mais seulement une fois sa plus grande hauteur, & une fois sa moindre hauteur. La plus grande hauteur de l'eau, si la Lune décline vers le pôle qui est sur l'horison du lieu, tombera à la sixiéme ou à la treiziéme heure après le passage de la Lune au méridien, & elle se changera en reflux lorsque la déclinaison de la Lune changera.

Halley a trouvé des exemples de tout cela dans les observations des pilotes faites à *Batsham* port du royaume de *Tunquin*, situé à $20^{d}\ 50'$ de latitude boréale. Dans ce port, il n'y a point de marée le jour qui suit le passage de la Lune par l'équateur, ensuite, lorsque la Lune commence à décliner vers le Nord on commence à s'appercevoir du flux & du reflux, non pas deux fois par jour comme dans les autres ports, mais une fois seulement chaque jour; & le flux arrive lorsque la Lune se couche, & le reflux lorsqu'elle se leve.

Le flux augmente dans ce port avec la déclinaison de la Lune jusqu'au septiéme ou huitiéme jour, ensuite il diminue par les

mêmes dégrés pendant sept autres jours; & lorsqu'ensuite la Lune passe dans les signes opposés il cesse entierement & se change après en reflux. Le reflux arrive alors au coucher de la Lune, & le flux à son lever, jusqu'à ce que la Lune revienne dans les premiers signes.

On arrive à ce port par deux détroits, l'un qui est dans la mer de la Chine entre le continent & l'isle de *Laconie*, l'autre dans la mer des Indes entre le continent & l'isle de *Borneo*. De sçavoir si les marées, en passant par ces détroits, & venant de la mer des Indes dans l'espace de 12 heures, & de la mer de la Chine dans l'espace de 6 heures, & en arrivant ainsi à la troisiéme & à la neuviéme heure lunaire, composent seules ces sortes de mouvemens, ou s'il ne s'y méle point d'autres causes propres à ces mers, c'est ce que je laisse à déterminer par les observations qu'on pourra faire sur les côtes voisines.

J'ai expliqué jusqu'ici les causes des mouvemens de la Lune & de la mer, il me reste à traiter à présent de la quantité de ces mouvemens.

PROPOSITION XXV. PROBLÉME VI.

Trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvemens de la Lune.

Que S représente le Soleil, T la terre, P la Lune, $CADB$ l'orbe de la Lune. Que SK prise sur SP soit égale à ST; & que SL soit à SK en raison doublée de SK à SP; enfin que LM soit parallele à PT; si la gravité accélératrice de la terre vers le Soleil est exprimée par la distance ST ou SK, SL sera la gravité accélératrice de la Lune vers le Soleil, laquelle est composée des parties SM, LM, desquelles LM & la partie TM de SM troublent les mouvemens de la Lune, comme on l'a fait voir au Livre premier dans la Proposition 66. & ses Corollaires. Fig. 3.

La terre & la Lune faisant leur révolution autour de leur commun centre de gravité, le mouvement de la terre autour de

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 3.

ce centre est aussi troublé par des forces semblables; mais on peut rapporter la somme de ces mouvemens & de ces forces à la Lune & représenter les sommes de ces forces par des lignes analogues *TM* & *LM*.

La force *LM*, dans sa moyenne quantité, est à la force centripéte, par laquelle la Lune peut faire sa révolution dans son orbite à la distance *PT*, autour de la terre supposée en repos, en raison doublée des temps périodiques de la Lune autour de la terre & de la terre autour du Soleil, par le Cor. 17. de la Prop. 66. du Liv. 1. c'est-à-dire, en raison doublée de 27 jours, 7^h $43'$ à 365 jours 6^h $9'$, ou, ce qui revient au même, comme 1000 à 178725, ou enfin comme 1 à $178\frac{29}{40}$: Or nous avons trouvé dans la Prop. 4. que si la terre & la Lune tournent autour d'un commun centre de gravité, leur moyenne distance entr'elles sera environ de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres médiocres de la terre à peu près : & la force par laquelle la Lune peut tourner dans son orbe autour de la terre en repos, à la distance *PT*, qui est de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre, est à la force par laquelle elle peut y tourner dans le même temps à la distance de 60 demi diamétres comme $60\frac{1}{2}$ est à 60 ; de plus, cette force est à la force de la gravité sur la terre comme 1 à 60×60 à peu près. Donc la force moyenne *ML* est à la force de la gravité sur la surface de la terre, comme $1 \times 60\frac{1}{2}$ à $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ou comme 1 à 638092, 6. Il n'est plus question maintenant que de connoître la proportion des lignes *TM*, *ML* pour avoir la force *TM*, & par conséquent celles par lesquelles le Soleil trouble les mouvemens de la Lune. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XXVI. PROBLÉME VII.

Trouver l'incrément horaire de l'aire que la Lune décrit autour de la terre, en supposant que son orbite soit circulaire.

Nous avons dit que les aires que la Lune décrit autour de la terre sont proportionnelles au temps lorsqu'on néglige l'altération

tion

tion que l'action du Soleil cause dans les mouvemens lunaires. Examinons ici quelle est l'inégalité du moment, ou de l'incrément horaire causée par cette action.

Afin de rendre le calcul plus facile, supposons l'orbe de la Lune parfaitement circulaire, & négligeons toutes ses inégalités, excepté celle dont il est ici question.

A cause du grand éloignement du Soleil, supposons que les lignes SP, ST soient paralleles entr'elles; par ce moyen, la force LM sera toujours réduite à sa moyenne quantité TP, ainsi que la force TM à sa moyenne quantité $3\,PK$. Ces forces, par le Cor. 2. des Loix, composent la force TL; laquelle, en abbaissant LE perpendiculairement sur le rayon TP, se résout dans les forces TE, EL, dont la premiere TE, agissant toujours selon le rayon TP, n'accélere ni ne retarde la description de l'aire TPC parcourue par le rayon TP; quant à la seconde EL, comme elle agit selon la perpendiculaire à ce rayon, elle accélere ou retarde cette description autant qu'elle retarde ou accélere le mouvement de la Lune. Cette accélération de la Lune, qui se fait à chaque instant, dans son passage de la quadrature C à la conjonction A, est comme la force même accélérante EL, c'est-à-dire, comme $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$. Fig. 4.

Que le temps soit représenté par le moyen mouvement de la Lune ou (ce qui revient presqu'au même) par l'angle CTP, ou encore par l'arc CP. Qu'on tire CG perpendiculaire & égale à CT; & qu'on suppose le quart de cercle AC divisé en un nombre infini de petites parties égales Pp, &c. qui représentent autant de petites parties égales de temps; qu'on mene de plus pk perpendiculaire à CT, & qu'on tire TG qui rencontre en F & en f ces mêmes lignes KP, kp prolongées; il est clair que FK sera égale à TK, & qu'on aura $Kk : PK :: Pp : Tp$, c'est-à-dire, en raison donnée; donc $FK \times Kk$ ou l'aire $FKkf$ sera comme $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$, c'est-à-dire, comme EL; & par consé-

Fig. 4.

quent l'aire totale $GCKF$ sera comme la somme de toutes les forces EL imprimées à la Lune pendant tout le temps CP, & par conséquent comme la vîtesse que toutes ces forces ont produite, c'est-à-dire, comme l'accélération de la description de l'aire CTP, ou comme l'incrément du moment.

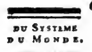
La force par laquelle la Lune peut faire sa révolution autour de la terre, supposée en repos, à la distance TP, dans le temps périodique $CADB$ de 27 jours, 7^h $43'$, feroit qu'un corps en tombant pendant le temps CT parcoureroit la longueur $\frac{1}{2}$ CT, & acquéreroit en même temps une vîtesse égale à celle de la Lune dans son orbe; ce qui est clair par le Cor. 9. de la Prop. 4. Liv. 1. Or comme la perpendiculaire Kd abbaissée sur TP est la troisiéme partie de EL, & la moitié de TP ou de ML dans les octans, la force EL dans les octans, où elle est la plus grande, surpassera la force ML dans la raison de 3 à 2, ainsi elle sera à la force par laquelle la Lune peut tourner autour de la terre en repos, dans son temps périodique, comme 100 à $\frac{2}{3}$ $\times$ $17872\frac{1}{2}$ ou 11915, & dans le temps CT elle devroit produire une vîtesse qui feroit la $\frac{100}{11915}$ partie de la vîtesse de la Lune, & pendant le temps CPA elle devroit produire une vîtesse qui feroit plus grande dans la raison de CA à CT ou TP.

Que la plus grande force EL dans les octans soit représentée par l'aire $FK \times Kk$ égale au rectangle $\frac{1}{2}$ $TP \times Pp$. La vîtesse que la plus grande force peut produire dans un temps quelconque CP sera à la vîtesse que la plus petite force entière EL peut produire dans le même temps, comme le rectangle $\frac{1}{2}$ $TP \times CP$ à l'aire $KCGF$: & les vîtesses produites pendant le temps total CPA seront entr'elles comme le rectangle $\frac{1}{2}$ $TP \times CA$ & le triangle TCG, ou comme l'arc d'un quart de cercle CA & son rayon TP. Donc la vîtesse à la fin du temps total sera la $\frac{100}{11915}$ partie de la vîtesse de la Lune. Si l'on ajoute, & si l'on ôte de cette vîtesse de la Lune, qui est proportionnelle à l'incrément médiocre de l'aire, la moitié de cette derniére vîtesse, & qu'on

représente l'incrément moyen par le nombre 11915, la somme 11915 + 50 ou 11965 représentera le plus grand incrément de l'aire dans la syzygie *A*, & la différence 11915 − 50 ou 11865 le plus petit incrément de cette même aire dans les quadratures. Donc les aires décrites en temps égaux dans les syzygies & dans les quadratures sont entr'elles, comme 11965 & 11865. Ajoutant au plus petit incrément 11865, un incrément qui soit à la différence 100 des incrémens, comme le trapéze *FKCG* au triangle *TCG*, ou (ce qui est la même chose) comme le quarré du sinus *PK* au quarré du rayon *TP*, c'est-à-dire, comme *Pd* à *TP*, la somme représentera l'incrément de l'aire, lorsque la Lune se trouve dans un lieu intermédiaire quelconque *P*. Fig. 4.

Tout cela a lieu dans l'hypothése que le Soleil & la terre soient en repos, & que la Lune fasse sa révolution dans le temps synodique de 27 jours, $7^h 43'$. Mais comme la vraie période sinodique lunaire est de 29 jours, $12^h 44'$, les incrémens des momens doivent augmenter en raison du temps, c'est-à-dire, en raison de 1080853 à 1000000. De cette maniére, l'incrément total, qui étoit la $\frac{100}{11915}$ partie du moment médiocre, deviendra sa $\frac{100}{11023}$ partie. Ainsi le moment de l'aire dans la quadrature de la Lune sera au moment de cette même aire dans la syzygie, comme 11023 − 50 à 11023 + 50, ou comme 10973 à 11073; & à son moment, lorsque la Lune est dans un lieu quelconque intermédiaire *P*, comme 10973 à 10973 + *Pd*, en supposant *TP* = 100.

Donc l'aire que la Lune décrit autour de la terre à chaque particule égale de temps, est à peu près comme la somme du nombre 219, 46 & du sinus verse du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature, dans un cercle dont le rayon est l'unité. Tout ceci suppose que la variation dans les octans soit de grandeur médiocre. Si la variation y est plus grande ou plus petite, ce sinus verse doit être augmenté ou diminué dans la même raison.



PROPOSITION XXVII. PROBLÉME VIII.

Par le mouvement horaire de la Lune trouver quelle est sa distance de la terre.

L'aire que la Lune décrit à chaque moment autour de la terre, est comme le mouvement horaire de la Lune, & le quarré de la distance de la Lune à la terre conjointement; & par conséquent, la distance de la Lune à la terre est en raison composée de la raison sousdoublée de l'aire directement, & de la raison sousdoublée inverse du mouvement horaire *C. Q. F. T.*

Cor. 1. On a, par ce moyen, le diamétre apparent de la Lune: car il est réciproquement comme sa distance à la terre. C'est aux Astronomes à voir combien cette régle s'accorde éxactement avec les Phénoménes.

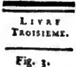
Cor. 2. On peut encore tirer de-là un moyen d'employer les Phénoménes à déterminer l'orbite de la Lune beaucoup plus éxactement qu'on n'a fait jusqu'à présent.

PROPOSITION XXVIII. PROBLÉME IX.

Trouver les diamétres de l'orbe dans lequel la Lune devroit se mouvoir, en supposant qu'elle n'eût point d'excentricité.

La courbure de la trajectoire qu'un mobile décriroit s'il étoit toujours tiré perpendiculairement à cette trajectoire, est en raison directe de l'attraction, & en raison inverse du quarré de la vîtesse. Je suppose que les courbures des courbes sont entr'elles dans la derniére proportion des sinus, ou des tangentes des angles de contact qui appartiennent aux rayons égaux, lorsque ces rayons diminuent à l'infini.

Fig. 3. L'attraction de la Lune vers la terre dans les syzygies est l'excès de sa gravité vers la terre sur la force solaire $2\,PK$, laquelle est la différence des gravités de la Lune & de la terre vers le Soleil: & dans les quadratures, cette attraction est la somme de



la gravité de la Lune vers la terre, & de la force solaire KT dirigée vers la terre. Ces attractions, en nommant N la quantité $\frac{AT+CT}{2}$, sont, à peu près, comme $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT\times N}$ & $\frac{178725}{CT^2}$ Fig. 3.

$+\frac{1000}{AT\times N}$; ou comme $178725\ N\times CT^2 - 2000\ AT^2\times CT$ & $178725\ N\times AT^2 + 1000\ CT^2\times AT$. Car si la gravité accélératrice de la Lune vers la terre est représentée par le nombre 178725, la force médiocre ML, qui dans les quadratures est PT ou TK, & qui tire la Lune vers la terre, sera 1000, & la force médiocre TM dans les syzygies sera 3000; de laquelle, si on ôte la force médiocre ML, il restera la force 2000, par laquelle la Lune s'éloigne de la terre dans les syzygies, & laquelle j'ai nommée ci-devant $2\,PK$.

La vîtesse de la Lune dans les syzygies A & B est à sa vîtesse dans les quadratures C & D, comme CT à AT, & comme le moment de l'aire que la Lune décrit dans les syzygies autour de la terre, est au moment de cette même aire dans les quadratures conjointement, c'est-à-dire, comme 11073 CT à 10973 AT.

Cela posé, il est évident que la courbure de l'orbe de la Lune dans les syzygies est à sa courbure dans les quadratures comme $120406729 \times 178725\ AT^2 \times CT^2 \times N - 120406729 \times 2000\ AT^4 \times CT$ à $122611329 \times 178725\ AT^2 \times CT^2 \times N + 122611329 \times 1000\ CT^4 \times AT$, c'est-à-dire, comme $2151969\ AT \times CT \times N - 24081\ AT^3$ à $2191371\ AT \times CT \times N + 12261\ CT^3$.

Comme on ignore la figure de l'orbe de la Lune, nous supposerons que cet orbe soit l'ellipse $DBCA$ dans le centre T de laquelle la terre est placée, & dont le grand axe DC passe par les quadratures, & le petit axe AB par les syzygies. Et à cause que le plan de cette ellipse se meut d'un mouvement angulaire autour de la terre, & que la trajectoire dont nous cherchons la courbure doit être décrite dans un plan qui soit entiérement privé de tout mouvement angulaire : il faut considérer la figure que la Fig. 5.

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 5.

Lune, en faiſant ſa révolution dans cette ellipſe, décrit dans ce plan immobile, c'eſt-à-dire, la figure Cpa, dont chaque point p eſt déterminé en prenant un point quelconque P dans l'ellipſe pour repréſenter le lieu de la Lune, & en menant Tp égale à TP, par une loi telle que l'angle PTp ſoit égal au mouvement apparent du Soleil depuis la quadrature C; ou (ce qui revient à peu près au même) que l'angle CTp ſoit à l'angle CTP comme le temps de la révolution ſynodique de la Lune eſt au temps de ſa révolution périodique, ou comme 29 jours $12^h\ 44'$ à 27 jours $7^h\ 43'$.

Prenant donc l'angle CTa dans cette raiſon à l'angle droit CTA, & faiſant Ta égale à TA; a ſera l'apſide la plus baſſe, & C l'apſide la plus haute de cet orbe Cpa quant aux courbures dans ces deux points, je trouve, en faiſant le calcul néceſſaire, que la différence entre la courbure de l'orbe Cpa au ſommet a, & la courbure du cercle dont le centre eſt T & le rayon TA eſt à la différence entre la courbure de l'ellipſe au ſommet A, & la courbure de ce même cercle, en raiſon doublée de l'angle CTP à l'angle CTp; & que la courbure de l'ellipſe en A eſt à la courbure de ce cercle, en raiſon doublée de TA à TC; de plus, que la courbure de ce cercle eſt à la courbure du cercle dont le centre eſt T & le rayon TC comme TC à TA; & que cette courbure eſt à la courbure de l'ellipſe en C, en raiſon doublée de TA à TC; & enfin que la différence entre la courbure de l'ellipſe au ſommet C & la courbure de ce dernier cercle, eſt à la différence entre la courbure de la figure Tpa au ſommet C, & la courbure de ce même cercle, en raiſon doublée de l'angle CTp à l'angle CTP. Ce qui ſe tire aiſément des ſinus des angles de contact, & des différences de ces angles.

Employant donc toutes ces raiſons, on trouve que la courbure de la figure Cpa en a, eſt à ſa courbure en C, comme $AT^3 + \frac{16824}{100000} CT^2 \times AT$ à $CT^3 + \frac{16824}{100000} AT^2 \times CT$. Le nombre

$\frac{16824}{100000}$ représentant la différence des quarrés des angles *CTP* & *CTp* divisée par le quarré du plus petit angle *CTP*, ou, ce qui est la même chose, la différence des quarrés des temps 27 jours $7^h\,43'$ & 29 jours $12^h\,44'$ divisée par le quarré du temps 27 jours $7^h\,43'$.

Fig. 5.

Donc puisque *a*, représente la syzygie de la Lune, & *C* sa quadrature, la proportion qu'on vient de trouver doit être la même que celle de la courbure de l'orbe de la Lune dans les syzygies à la courbure du même orbe dans les quadratures, qui a été trouvée ci-dessus. C'est pourquoi, pour trouver la proportion de *CT* à *AT*, il n'y a qu'à multiplier les extrêmes & les moyens entr'eux; & les termes qui en viendront étant divisés par $TC \times AT$ donneront l'équation $2062,79\,CT^4 - 2151969\,N \times CT^3 + 368676\,N \times AT \times CT^2 + 36342\,AT^2 \times CT^2 - 362047\,N \times AT^2 \times CT + 2191371\,N \times AT^3 + 4051,4\,AT^4 = 0$. Dans laquelle, si au lieu de la demie somme *N* des termes *AT*, *CT*, on met 1, & au lieu de leur demie différence *x*, & par conséquent $1 + x$ au lieu de *CT*, & $1 - x$ au lieu de *AT*; on aura $x = 0,00719$, c'est-à-dire, que le demi diamétre *CT* sera 1,00719, & le demi diamétre *AT* 0,99281 : lesquels nombres sont entr'eux à peu près comme $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$. La distance de la Lune à la terre dans les syzygies, est donc à sa distance dans les quadratures comme $69\frac{1}{24}$ à $70\frac{1}{24}$, ou en nombres ronds comme 69 à 70, pourvû qu'on fasse abstraction de l'excentricité.

PROPOSITION XXIX. PROBLÉME X.

Trouver la variation de la Lune.

Cette inégalité de la Lune vient en partie de l'inégalité des momens de l'aire que la Lune décrit autour de la terre, & en partie de la forme elliptique de l'orbe lunaire. Supposant que la Lune se meuve dans une ellipse *DBCA* autour de la terre en repos, placée dans le centre de cette ellipse, elle décrira des aires

Fig. 5.

Fig. 5.

CTP proportionnelles aux temps; & si le demi grand diamétre *CT* de l'ellipse est à son petit demi diamétre *TA* comme 70 à 69, la tangente de l'angle *CTP* sera à la tangente de l'angle du mouvement moyen calculé depuis la quadrature *C*, comme 69 à 70. Mais la description de l'aire *CTP*, lorsque la Lune passe de la quadrature à la syzygie, doit être accélérée, en telle sorte que son moment dans la syzygie soit à son moment dans la quadrature comme 11073 à 10973, & que l'excès du moment dans un lieu intermédiaire quelconque *P*, sur le moment dans la quadrature, soit comme le quarré du sinus de l'angle *CTP*. C'est ce qu'on fera assez exactement, si on diminue la tangente de l'angle *CTP* en raison sousdoublée du nombre 10973 au nombre 11073, c'est-à-dire, en raison du nombre 68, 6877 au nombre 69. Par ce moyen, la tangente de l'angle *CTP* sera à la tangente du mouvement moyen comme 68, 6877 à 70. Et l'angle *CTP* dans les octans, où le mouvement moyen est de 45^{d}, sera de $44^{d}\ 27'\ 28''$, qui étant ôté de l'angle du mouvement moyen qui est de 45^{d} donnera $32'\ 32''$ pour la plus grande variation.

Ce seroit là la plus grande variation, si la Lune, en passant de la quadrature à la syzygie, décrivoit un angle *CTA* qui fut exactement de 90 dégrés. Mais à cause du mouvement de la terre, par lequel le Soleil avance en conséquence par son mouvement apparent, la Lune, avant d'avoir atteint le Soleil, décrit un angle *CTa*, qui est plus grand qu'un angle droit, dans la raison du temps de la révolution sinodique de la Lune au temps de sa révolution périodique, c'est-à-dire, en raison de 29 jours $12^{h}\ 44'$ à 27 jours, $7^{h}\ 43'$. Il faut donc augmenter tous les angles autour du centre *T* dans la même raison, ce qui au lieu de $32'\ 32''$ pour la plus plus grande variation donnera $35'\ 10''$.

C'est-là la grandeur de la variation dans la moyenne distance du Soleil à la terre, en négligeant les différences qui peuvent naître de la courbure du grand orbe, & de la quantité dont l'action du Soleil sur la Lune, lorsqu'elle est nouvelle & en croissant

fant, furpaffe l'action de ce même aftre fur la Lune lorfqu'elle eft pleine & gibbeufe.

Dans les autres diftances du Soleil à la terre, la plus grande variation eft en raifon compofée de la raifon doublée directe du temps de la révolution fynodique de la Lune (pour le temps donné de l'année) & de la raifon inverfe triplée de la diftance du Soleil à la terre. Ainfi dans l'apogée du Soleil, la plus grande variation eft de 33′ 14″, & dans fon périgée, elle eft de 37′ 11″. fuppofé que l'excentricité du Soleil foit au demi diamétre tranfverfal du grand orbe comme $16\frac{11}{16}$ à 1000.

Nous avons trouvé jufqu'à préfent la variation de la Lune en fuppofant que fon orbe ne foit point excentrique, & que lorfqu'elle eft dans fes octans elle foit toujours à fa médiocre diftance de la terre. Mais comme la Lune par fon excentricité eft tantôt plus près & tantôt plus loin de la terre qu'elle ne l'eft dans l'orbe qu'on vient d'éxaminer, fa variation pourra être un peu plus grande, ou un peu moindre que la précédente : j'en laiffe l'excès ou le défaut à déterminer aux aftronomes par les Phénoménes.

PROPOSITION XXX. PROBLÊME XI.

Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire.

Que S défigne le Soleil, T la terre, P la Lune, NPn l'orbe de la Lune, Npn la projection de cet orbe dans le plan de l'écliptique; N & n les nœuds, $nTNm$ la ligne de ces nœuds prolongée infiniment; PI, PK des perpendiculaires abbaiffées fur les lignes ST, Qq; Pp une perpendiculaire abbaiffée fur le plan de l'écliptique; A & B les fyzygies de la Lune dans ce plan; AZ une perpendiculaire à la ligne des nœuds Nn; Q & q les quadratures de la Lune dans le plan de l'écliptique, & pK une perpendiculaire à la ligne Qq des quadratures. Fig. 6.

La force du Soleil pour troubler les mouvemens de la Lune eft compofée de deux forces (par la Prop. 25.) l'une proportionnelle à la ligne LM de la figure de cette Propofition, & l'autre à la

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 6.

ligne *MT* de la même figure. La Lune par la premiere de ces forces est tirée vers la terre, & par la seconde vers le Soleil, suivant une ligne parallele à la droite *S T* menée du Soleil à la terre.

La premiere force *LM* agissant dans le plan de l'orbite lunaire ne sçauroit altérer la situation de ce plan, ainsi elle ne doit point être considérée. Quant à la force *M T* par laquelle le plan de l'orbite lunaire est dérangé, elle a pour expression 3 *PK* ou 3 *IT*. Et cette force (par la Prop. 25.) est à celle par laquelle la Lune pourroit être mûe uniformement (dans son temps périodique) dans un cercle autour de la terre supposée fixe, comme 3 *I T* au rayon du cercle multiplié par le nombre 178, 725, ou comme *I T* au rayon multiplié par 59, 575. Au reste dans ce calcul & dans tout ce qui suit, je considére toutes les lignes menées de la Lune au Soleil comme paralléles à celles qui sont tirées de la terre au Soleil, parce que l'inclinaison de ces lignes diminue à peu près tous les effets dans quelques cas, de la même maniére qu'elle les augmente dans d'autres; & que nous cherchons les mouvemens médiocres des nœuds, en négligeant les fractions insensibles qui rendroient le calcul trop embarrassant.

P M désignant maintenant l'arc que la Lune décrit dans un instant donné, & *M L* la petite ligne dont la Lune parcoureroit la moitié dans le même temps en vertu de la force précédente 3 *I T*; soient tirées *P L*, *P M* que l'on prolonge en *m* & en *l*, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan de l'écliptique, & soit abbaissée la perpendiculaire *P H* de *P* sur *T m*.

Parce que la droite *M L* est parallele au plan de l'écliptique, & que par conséquent elle ne peut rencontrer la droite *m l* qui est dans ce plan, que de plus ces droites *M L*, *m l*, sont dans un même plan *L M P m l*; il faudra qu'elles soient paralleles, & par conséquent que les triangles *L M P*, *l m P* soient semblables.

Présentement, comme *M P m* est dans le plan de l'orbite dans lequel la Lune se meut en *P*, le point *m* tombera sur la ligne *N n* menée par les nœuds *N*, *n* de cette orbite : & parce que la force

qui fait décrire la moitié de la petite ligne LM, feroit décrire cette ligne entiere si elle étoit imprimée en une seule fois dans le lieu P; & qu'elle feroit mouvoir la Lune dans l'arc dont la corde seroit LP, & transporteroit par conséquent la Lune du plan $MPmT$ dans le plan $LPlT$; le mouvement angulaire des nœuds engendré par cette force sera égal à l'angle mTl. Mais $ml : mP :: ML : MP$, donc, à cause que MP est donnée par la supposition du temps constant, ml sera comme le rectangle $ML \times mP$, c'est-à-dire, comme le rectangle $IT \times mP$. Et l'angle mTl, si on suppose l'angle Tml droit, sera comme $\frac{ml}{Tm}$, & par conséquent comme $\frac{IT \times mP}{Tm}$, ou, ce qui revient au même, (à cause des proportionnelles Tm & mP, TP & PH) comme $\frac{IT \times PH}{TP}$ ou comme $IT \times PH$ à cause que TP est donnée.

Fig. 6.

Mais comme l'angle Tml ou STN n'est pas droit, l'angle mTl sera moindre, & cela dans la raison du sinus de l'angle STN au rayon, ou de AZ, à AT. Donc la vitesse des nœuds est comme $IT \times PH \times AZ$, c'est-à-dire, comme le produit des sinus des trois angles TPI, PTN & STN.

Si ces angles, les nœuds étant dans les quadratures, & la Lune dans la syzygie, sont droits, la petite droite ml se trouvera à une distance infinie, & l'angle mTl deviendra égal à l'angle mPl. Or dans ce cas, l'angle mPl est à l'angle PTM que la Lune décrit dans le même temps par son mouvement apparent autour de la terre, comme 1 à 59, 575. Car l'angle mPl est égal à l'angle LPM, c'est-à-dire, à l'angle de la déflexion de la Lune du chemin rectiligne, qui seroit produite par la seule force solaire $3\,IT$ dans ce temps donné, si la Lune cessoit d'être pesante; de plus, l'angle PTM est égal à l'angle de la déflexion de la Lune du chemin rectiligne causée par la seule force qui la retient dans son orbite, en faisant abstraction de la force solaire $3\,IT$. Et ces forces, comme nous l'avons dit ci-dessus, sont entr'elles comme 1 à 59, 575. Donc, comme le mouvement

DU SYSTEME DU MONDE.

moyen horaire de la Lune, à l'égard des fixes, est de $32'$, $56''$, $27'''$ $12^{iv}\frac{1}{2}$, le mouvement horaire du nœud sera, dans ce cas, de $33''$, $10'''$, 33^{iv}, 12^{v}; & dans les autres cas, ce mouvement horaire sera à $33''$, $10'''$, 33^{iv}, 12^{v}, comme le produit des sinus des trois angles *TPI*, *PTN*, & *STN*, (c'est-à-dire, de la distance de la Lune à la quadrature, de la distance de la Lune au nœud, & de la distance du nœud au Soleil) est au cube du rayon. Et toutes les fois que le signe d'un de ces angles passera du positif au négatif, & du négatif au positif, le mouvement des nœuds se changera de regressif en progressif, & de progressif en regressif. D'où il arrive que les nœuds avancent toutes les fois que la Lune est entre une des quadratures & le nœud le plus proche de la quadrature. Dans les autres cas, les nœuds rétrogradent, & en vertu de l'excès du mouvement rétrograde sur le mouvement progressif les nœuds seront portés chaque mois en antécédence.

Fig. 6.

Fig. 7.

Cor. 1. De-là il suit, que si on abbaisse des extrémités *P* & *M* d'un arc donné infiniment petit *PM*, les perpendiculaires *PK*, *Mk* à la ligne *Qq* qui passe par les quadratures, & qu'on prolonge ces perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles coupent la ligne des nœuds *Nn* en *D* & en *d* le mouvement horaire des nœuds sera comme l'aire *MPDd* & le quarré de la ligne *AZ* conjointement. Car soient *PK*, *PH* & *AZ* les trois sinus dont on vient de parler, *PK* étant le sinus de la distance de la Lune à la quadrature, *PH* le sinus de la distance de la Lune au nœud, & *AZ* le sinus de la distance du nœud au Soleil : on aura pour la vitesse du nœud le produit $PK \times PH \times AZ$. Mais $PT : PK :: PM : Kk$; donc, à cause des données *PT* & *PM*, la petite droite *Kk* sera proportionnelle à *PK*. De plus, $AT : PD :: AZ : PH$, & par conséquent *PH* est proportionnelle à $PD \times AZ$. Donc $PK \times PH$ est comme $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ sera comme $Kk \times PD \times AZ^2$, c'est-à-dire, comme l'aire *PDdM* & AZ^2 conjointement. *C. Q. F. D.*

Cor. 2. Dans une position quelconque donnée des nœuds, le

mouvement horaire médiocre eſt la moitié du mouvement horaire dans les ſyzygies de la Lune, c'eſt-à-dire, que ce mouvement eſt à 16'', 35''', 16^{iv}, 36^{v}, comme le quarré du ſinus de la diſtance des nœuds aux ſyzygies eſt au quarré du rayon, ou ce qui revient au même, comme AZ^2 à AT^2.

LIVRE TROISIEME.

Fig. 7.

Car ſi la Lune parcourt d'un mouvement uniforme le demi cercle QAq, la ſomme de toutes les aires $PDdM$ décrites pendant le temps que la Lune va de Q à M ſera l'aire $QMdE$ terminée par la tangente QE du cercle; & la ſomme de toutes les aires $PDdM$ pendant que la Lune va en n ſera l'aire totale $EQAn$ que la ligne PD décrit, enſuite la Lune allant de n en q, la ligne PD tombera hors du cercle, & décrira l'aire nqe terminée par la tangente qe du cercle; laquelle aire, à cauſe que les nœuds alloient d'abord en rétrogradant & vont alors en avançant, doit être retranchée de la premiere aire, & par ſon égalité à l'aire QEN, le reſte deviendra le demi cercle $NQAn$. Donc la ſomme de toutes les aires $PDdM$ décrites pendant le temps que la Lune parcourt un demi cercle, eſt l'aire du demi cercle; & la ſomme de toutes les mêmes aires décrites pendant le temps que la Lune parcourt le cercle entier, eſt l'aire du cercle entier.

Mais l'aire $PDdM$, lorſque la Lune eſt dans les ſyzygies, eſt le rectangle ſous l'arc PM & le rayon PT; & la ſomme de toutes les aires égales à celle-là, décrites pendant le temps que la Lune parcourt le cercle, eſt le rectangle de toute la circonférence & du rayon; & ce rectangle étant égal à deux cercles, eſt double du rectangle précédent. Donc les nœuds, avec une vîteſſe continuée uniformement & égale à celle qu'ils ont dans les ſyzygies lunaires, décriroient un eſpace double de celui qu'ils décrivent réellement; & par conſéquent le mouvement médiocre, qui étant continué uniformement feroit décrire aux nœuds l'eſpace qu'ils parcourent réellement d'un mouvement inégal, eſt la moitié du mouvement qu'ils ont dans les ſyzygies lunaires. Et comme le plus grand mouvement horaire, lorſ-

que les nœuds sont dans les quadratures, est de $33''$, $10'''$, 33^{iv}, 12^{v}, le mouvement médiocre horaire sera dans ce cas de $16''$, $35'''$, 16^{iv}, 36^{v}. Or le mouvement horaire des nœuds étant toujours comme AZ^2 & l'aire $PDdM$ conjointement, il est encore dans les syzygies comme AZ^2 & l'aire $PDdM$ conjointement, ou, ce qui revient au même, comme AZ^2 (à cause qu'alors l'aire $PDdM$ est donnée); le mouvement médiocre sera aussi comme AZ^2, donc ce mouvement, lorsque les nœuds seront hors des quadratures, sera à $16''$, $35'''$, 16^{iv}, 36^{v}, comme AZ^2 à AT^2. *C. Q. F. D.*

Fig. 7.

PROPOSITION XXXI. PROBLÉME XII.

Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe elliptique.

Fig. 8. Que $Qpmaq$ désigne une ellipse, Qq son grand axe, ab son petit axe; $QAqB$ le cercle circonscrit; T la terre placée au centre commun de l'ellipse & du cercle; S le Soleil; p la Lune mue dans l'ellipse, & pm l'arc qu'elle décrit dans une particule donnée infiniment petite de temps; Nn la ligne des nœuds; pK & mk les perpendiculaires abbaissées sur l'axe Qq & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent le cercle en P & en M, & la ligne des nœuds en D & en d.

Cela posé, je dis que si la Lune décrit autour de la terre des aires proportionnelles au temps, le mouvement horaire du nœud dans l'ellipse sera comme l'aire $pDdm$ & AZ^2 conjointement.

Pour le démontrer, soient menées PF & pf qui touchent en P & p le cercle & l'ellipse, qui rencontrent en F & en f la ligne des nœuds TN, & qui se rencontrent elles-mêmes ainsi que l'axe TQ en Y. Soit pris ML pour désigner l'espace que la Lune tournant dans le cercle, pourroit décrire d'un mouvement transversal par la force $3IT$ ou $3PK$, pendant qu'elle décrit l'arc PM. Et prenant ml pour l'espace que la Lune, tournant dans le même temps dans l'ellipse, décriroit par la même force $3IT$ ou $3PK$; en-

Fig. 8.

fin soient prolongées LP & lp jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan de l'écliptique en G & en g; & soient tirées FG & fg dont la premiere FG prolongée coupe pf, pg & TQ en c, e, & R, respectivement, & dont la seconde fg prolongée coupe TQ en r.

Il est clair que la force $3\,IT$ ou $3\,PK$ dans le cercle, étant à la force $3\,IT$ ou $3\,pK$ dans l'ellipse comme PK à pK ou comme AT à aT; l'espace ML, décrit par la premiere force, sera à l'espace ml décrit par la derniere, comme PK à pK, c'est-à-dire, à cause des figures semblables $PYKp$ & $FYRc$ comme FR à cR. Mais, (par les triangles semblables PLM, PGF) $ML : FG :: PL : PG$, c'est-à-dire, (à cause des paralleles Lk, PK, GR) $:: pl : pe$, ou, ce qui revient au même, (à cause des triangles semblables plm, pce) $:: lm : ce$. Donc $LM : lm$ ou $FR : cR :: FG : ce$.

De là il suit que si fg étoit à ce comme fY à cY, ou comme fr à cR, c'est-à-dire, en raison composée de fr à FR & de FR à cR ou de fT à FT & de FG à ce, en ôtant de part & d'autre la raison de FG à ce, il y auroit égalité entre la raison de fg à FG & celle de fT à FT; c'est-à-dire, que les angles à la terre soutenus par fg & FG, seroient égaux: ou, ce qui revient au même, les mouvemens des nœuds dans l'ellipse & dans le cercle seroient égaux dans cette supposition, puisque ces angles, seroient, par ce que nous avons vû dans la Proposition précédente, les mouvemens des nœuds dans le temps dans lequel la Lune parcourt l'arc PM dans le cercle & l'arc pm dans l'ellipse.

Cela seroit en effet ainsi, si fg étoit à ce comme fY à cY, c'est-à-dire, si fg étoit $= \frac{ce \times fY}{cY}$. Mais à cause des triangles semblables fgp, cep, on a $fg : ce :: fp : cp$; donc $fg = \frac{ce \times fp}{cp}$; & par conséquent l'angle que fg soustend réellement, est au premier angle que FG soustend, c'est-à-dire, le mouvement des

DU SYSTEME DU MONDE.

nœuds dans l'ellipſe eſt au mouvement des nœuds dans le cercle

Fig. 8.

comme cette ligne fg ou $\frac{ce+fp}{cp}$ à la premiere valeur de fg qu'on a trouvé $= \frac{ce \times fY}{cY}$, ou ce qui revient au même, en raiſon composée de $fp \times cY$ à $fY \times cp$, c'eſt-à-dire, en raiſon de fp à fY & de cY à cp, ou bien encore, en menant ph parallele à TN & rencontrant FP en h, en raiſon composée de Fh à FY & de FY à FP; ou enfin dans la raiſon Fh à FP qui eſt celle de Dp à DP, ou de l'aire $Dpmd$ à l'aire $DPMd$.

Or comme, par le Cor. 1. de la Prop. 30. le mouvement horaire des nœuds dans le cercle eſt en raiſon composée de AZ^2 & de l'aire $DPMd$, le mouvement horaire des nœuds dans l'ellipſe eſt donc en raiſon composée de l'aire $Dpmd$ & de AZ^2. *C. Q. F. D.*

Cor. C'eſt pourquoi, comme dans une poſition donnée des nœuds, la ſomme de toutes les aires $pDdm$ décrites pendant le temps que la Lune va d'une quadrature à un lieu quelconque m, eſt l'aire $mpQEd$, terminée par la ligne QE tangente de l'ellipſe; & que la ſomme de toutes ces aires décrites dans une révolution entiére eſt l'aire elliptique entiere : le mouvement médiocre des nœuds dans l'ellipſe ſera au mouvement médiocre des nœuds dans le cercle, comme l'ellipſe au cercle; c'eſt-à-dire, $:: Ta : TA$ ou $:: 69 : 70$. & par conſéquent, puiſque (Cor. 2. Propoſition 30.) le mouvement horaire médiocre des nœuds dans le cercle, eſt à $16''$, $35'''$, 16^{iv}, 36^{v} comme AZ^2 à AT^2, ſi on prend l'angle de $16''$, $21'''$, 3^{iv}, 30^{v}, comme 69 à 70, le mouvement horaire médiocre des nœuds dans l'ellipſe ſera à $16''$, $21'''$, 3^{iv}, 30^{v}, comme AZ^2 à AT^2; c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus de la diſtance du nœud au Soleil eſt au quarré du rayon.

Au reſte, les aires que la Lune décrit autour de la terre, étant parcourues plus promptement dans les ſyzygies que dans les quadratures

dratures, le temps doit diminuer dans les ſyzygies & augmenter dans les quadratures, & le mouvement des nœuds doit ſubir la même loy.

Fig. 8.

Or le moment de l'aire dans les quadratures de la Lune, eſt à ſon moment dans les ſyzygies comme 10973 à 11073; & par conſéquent, le moment médiocre dans les octans eſt à l'excès dans les ſyzygies & au défaut dans les quadratures, comme la demie ſomme 11023 de ces nombres eſt à leur demie différence 50. Ainſi à cauſe que le temps dans des parties égales de l'orbe de la Lune eſt réciproquement comme ſa vîteſſe, le temps médiocre dans les octans ſera à l'excès du temps dans les quadratures & à ſon défaut dans les ſyzygies, produit par cette cauſe, comme 11023 à 50 à peu près. Quant aux lieux placés entre les quadratures & les ſyzygies, je trouve que l'excès des momens de l'aire à chacun des lieux ſur le plus petit moment dans les quadratures, eſt à peu près proportionnel au quarré du ſinus de la diſtance de la Lune aux quadratures; & par conſéquent, la différence entre le moment dans un lieu quelconque, & le moment médiocre dans les octans, eſt comme la différence entre le quarré du ſinus de la diſtance de la Lune aux quadratures, & le quarré du ſinus de 45^{d} ou la moitié du quarré du rayon; & l'incrément du temps dans chacun des lieux entre les octans & les quadratures, & ſon décrément entre les octans & les ſyzygies, ſont dans la même raiſon.

Mais le mouvement des nœuds, pendant le temps que la Lune parcourt des parties égales d'orbe, eſt accéléré ou retardé en raiſon doublée du temps. Car ce mouvement, pendant que la Lune parcourt l'arc *PM* (toutes choſes d'ailleurs égales) eſt comme *ML*; & *ML* eſt en raiſon doublée du temps. C'eſt pourquoi le mouvement des nœuds dans les ſyzygies, pendant le temps que la Lune parcourt des parties données de ſon orbe, eſt diminué dans la raiſon doublée du nombre 11073 au nombre 11023; & le décrément eſt au mouvement reſtant comme 100

à 10973, & par conséquent au mouvement total à peu près comme 100 à 11073. Or le décrément dans les lieux entre les octans & les syzygies & l'incrément entre les octans & les quadratures sont à peu près à ce décrément en raison composée de la raison du mouvement total dans ces lieux au mouvement total dans les syzygies, & de la raison que la différence entre le quarré du sinus de la distance de la Lune à la quadrature, & la moitié du quarré du rayon, a avec la moitié du quarré du rayon.

Ainsi, si les nœuds sont dans les quadratures, & qu'on prenne deux lieux également distans de l'octant, & deux autres également distans de la syzygie & de la quadrature : ensuite, que des décrémens des mouvemens dans les deux lieux entre la syzygie & l'octant, on retranche les incrémens des mouvemens dans les deux autres lieux qui sont entre l'octant & la quadrature; le décrément restant sera égal au décrément dans la syzygie : ce dont il est facile de voir la raison. De-là il suit que le décrément médiocre qui doit être retranché du mouvement médiocre des nœuds, est la quatriéme partie du décrément dans la syzygie.

Le mouvement total horaire des nœuds dans les syzygies, lorsque la Lune est supposée décrire des aires proportionnelles au temps autour de la terre, a été trouvé précédemment de $32''\,42'''\,7^{iv}$; & le décrément du mouvement des nœuds, dans le temps que la Lune décrit plus promptement ce même espace, est, suivant ce qu'on vient de dire, à ce mouvement, comme 100 à 11073; donc ce décrément est de $17'''\,43^{iv}\,11^{v}$ dont la quatriéme partie $4'''\,25^{iv}\,48^{v}$ retranchée du mouvement horaire médiocre trouvé ci-dessus de $16''\,21'''\,3^{iv}\,30^{v}$ donne $16''\,16'''\,37^{iv}\,42^{v}$ pour le mouvement médiocre horaire corrigé.

Si les nœuds se trouvent hors des quadratures, & qu'on considere deux lieux également distans de part & d'autre des syzygies; la somme des mouvemens des nœuds, lorsque la Lune sera dans ces lieux, sera à la somme des mouvemens lorsque la Lune sera dans ces mêmes lieux, & que les nœuds seront dans les qua-

dratures, comme AZ^2 à AT^2. Et les décrémens des mouvemens qui viennent des causes dont on a parlé, seront l'un à l'autre comme ces mouvemens, c'est-à-dire, que les mouvemens restans seront l'un à l'autre comme AZ^2 à AT^2, & les mouvemens médiocres comme les mouvemens restans. Donc le mouvement médiocre horaire corrigé, dans une position quelconque donnée des nœuds, sera à $16'' \, 16''' \, 37^{iv}. 42^{v}$ comme AZ^2 à AT^2, c'est-à-dire, comme le quarré du sinus de la distance des nœuds aux syzygies au quarré du rayon. Fig. 8.

PROPOSITION XXXII. PROBLÉME XIII.

Trouver le mouvement moyen des nœuds de la Lune.

Le mouvement moyen annuel est la somme de tous les mouvemens médiocres horaires dans une année. Qu'on imagine un nœud allant vers N, & qu'on suppose de plus qu'à la fin de chaque heure il soit replacé dans son premier lieu; ensorte que malgré son mouvement propre, il conserve toujours la même position par rapport aux fixes. Qu'on suppose encore que pendant ce tems le Soleil, par le mouvement de la terre, s'éloigne de ce nœud, & qu'il acheve uniformement sa révolution annuelle apparente. Aa étant un très-petit arc donné que la ligne TS menée au Soleil parcourt sur le cercle NAn dans un petit temps donné : le mouvement médiocre horaire sera, par ce qu'on a fait voir ci-devant, comme AZ^2, c'est-à-dire, à cause des proportionnelles AZ, ZY, comme le rectangle sous AZ & ZY, ou, ce qui revient au même, comme l'aire $AZYa$. Et la somme de tous les mouvemens médiocres horaires depuis le commencement sera comme la somme de toutes les aires $aYZA$ c'est-à-dire, comme l'aire NAZ. Or la plus grande aire $AZYa$ est égale au rectangle sous l'arc Aa & le rayon du cercle; & par conséquent, la somme de tous les rectangles dans le cercle entier sera à la somme d'autant de plus grands, comme l'aire de tout le cercle est au rectangle sous la circonférence entiere Fig. 9.

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 9.

& le rayon, c'eſt-à-dire, comme 1 à 2. Mais le mouvement horaire, répondant au grand rectangle, a été trouvé de 16″ 16‴ 37^{iv} 42^{v}, qui devient de 39^d 38′ 7″ 50‴ dans une année entiere ſidérale de 365 jours 6^h 9′ : donc la moitié 19^d 49′ 3″ 55‴ de ce mouvement eſt le mouvement moyen des nœuds qui répond à tout le cercle. Et le mouvement des nœuds, pendant que le Soleil va de *N* en *A*, eſt à 19^d 49′ 3″ 55‴ comme l'aire *NAZ* à tout le cercle.

Cela feroit ainſi dans la ſuppoſition que le nœud fut remis à chaque heure à ſon premier lieu, & que le Soleil au bout d'une année retournât au même nœud d'où il étoit parti au commencement. Mais comme le mouvement du nœud eſt cauſe que le Soleil y revient plutôt, il faut compter de combien le temps de ce retour eſt abrégé.

Le Soleil parcourant par an 360^d, & le nœud par ſon plus grand mouvement faiſant dans le même temps 39^d 38′ 7″ 50‴ ou 39, 6355 dégrés ; & le mouvement médiocre de ce nœud dans un lieu quelconque *N* étant à ſon mouvement médiocre dans ſes quadratures, comme AZ^2 à AT^2, le mouvement du Soleil ſera au mouvement du nœud au lieu *N* comme 360 AT^2 à 39, 6355 AZ^2, c'eſt-à-dire, comme 9, 0827646 AT^2 à AZ^2. Ainſi en ſuppoſant que toute la circonférence du cercle *NAn* ſoit diviſée en petites parties égales *Aa*, le temps pendant lequel le Soleil parcoureroit la petite partie *Aa*, ſi le cercle étoit en repos, ſera au temps pendant lequel il parcourera la même petite partie, ce cercle & les nœuds revolvans autour du centre *T*, réciproquement comme 9, 0827646 AT^2 à 9, 0827646 $AT^2 + AZ^2$. Car le temps eſt réciproquement comme la vîteſſe avec laquelle cette petite partie eſt parcourue, & cette vîteſſe eſt la ſomme des vîteſſes du Soleil & du nœud. Donc ſi le temps pendant lequel le Soleil parcoureroit l'arc *NA*, indépendamment du mouvement du nœud, eſt repréſenté par le ſecteur *NTA*, & la petite partie de temps pendant laquelle il

parcoureroit un très-petit arc Aa par la petite portion ATa de ce secteur; que l'on abbaisse aY perpendiculaire sur Nn, & qu'on prenne dZ sur AZ d'une longueur telle que le rectangle $dZ \times ZY$ soit à la petite portion ATa du secteur comme AZ^2 à $9,0827646\, AT^2 + AZ^2$, c'est-à-dire, ensorte que $dZ : \frac{1}{2} AZ :: AT^2 : 9,0827646\, AT^2 + AZ^2$; le rectangle $dZ \times ZY$ représentera le décrément du temps causé par le mouvement du nœud, pendant le temps total pendant lequel l'arc Aa a été parcouru. Et si la courbe $NdGn$ est le lieu des points d, l'aire curviligne NdZ sera le décrément total pendant le temps employé à parcourir l'arc NA entier, & par conséquent l'excès du secteur NAT sur l'aire NdZ sera ce temps total. Or comme le mouvement du nœud dans un temps plus court est moindre dans la raison du temps, l'aire $AaZY$ devra être diminuée dans la même raison; ce qui se fera en prenant sur AZ l'intervalle eZ qui soit à la ligne AZ comme AZ^2 à $9,0827646\, AT^2 + AZ^2$. Par ce moyen le rectangle $eZ \times ZY$ sera à l'aire $AZYa$ comme le décrément du temps employé à parcourir l'arc Aa, au temps total dans lequel il seroit parcouru si le nœud étoit en repos; & par conséquent ce rectangle répondra au décrément du mouvement du nœud. Et si la courbe $NeFn$ est le lieu des points e, l'aire totale NeZ, qui est la somme de tous les décrémens, répondra au décrément total, pendant le temps employé à parcourir l'arc AN; & l'aire restante NAe répondra au mouvement restant, qui est le vrai mouvement du nœud, pendant le temps pendant lequel l'arc total NA est parcouru par les mouvemens réunis du Soleil & des nœuds. Fig. 9.

Mais en employant les méthodes des suites infinies, on trouve que l'aire du demi cercle est à l'aire de la figure $NeFn$ cherchée, environ comme 793 à 60. Donc, comme le mouvement qui répondoit au cercle entier étoit de $19^{d}\ 49'\ 3''\ 55'''$ le mouvement qui répond au double de la figure $NeFn$ sera de $1^{d}\ 29'\ 58''\ 2'''$ qui, étant soustrait du premier mouvement, don-

nera $18^{d}\ 19'\ 5''\ 53'''$ pour le mouvement total du nœud par rapport aux fixes entre ſes propres conjonctions avec le Soleil; retranchant enſuite ce mouvement du mouvement annuel du Soleil qui eſt de 360^{d}, on aura $341^{d}\ 40'\ 54''\ 7'''$ pour le mouvement du Soleil entre ces mêmes conjonctions. Et ce mouvement eſt au mouvement annuel de 360^{d}, comme le mouvement du nœud ci-devant trouvé de $18^{d}\ 19'\ 5''\ 53'''$ à ſon mouvement annuel, qui par conſéquent ſera de $19^{d}\ 18'\ 1''\ 23'''$. Et c'eſt-là le mouvement moyen des nœuds dans une année ſidérale. Ce mouvement, par les tables aſtronomiques, eſt de $19^{d}\ 21'\ 21''\ 50'''$. Ainſi la différence eſt moindre que $\frac{1}{100}$ partie du mouvement total, & elle vient vraiſemblablement de l'excentricité de l'orbe de la Lune, & de ſon inclinaiſon au plan de l'écliptique. Par l'excentricité de cet orbe le mouvement des nœuds eſt un peu trop accéléré, & ſon inclinaiſon le retarde un peu trop, ce qui le réduit à peu près à ſa juſte quantité.

PROPOSITION XXXIII. PROBLÉME XIV.

Trouver le mouvement vrai des nœuds de la Lune.

Fig. 9. Le temps étant repréſenté par l'aire $NTA - NdZ$ l'aire NAe repréſente le mouvement vrai, ainſi il eſt donné par les quadratures. Comme le calcul ſeroit pénible par cette méthode, il vaut mieux employer la conſtruction ſuivante.

Fig. 10. Du centre C, & d'un intervale quelconque CD, ſoit décrit le cercle $BEFD$, & ſoit prolongée CD en A, enſorte que AB ſoit à AC comme le mouvement moyen à la moitié du mouvement vrai médiocre, lorſque les nœuds ſont dans les quadratures, c'eſt-à-dire, comme $19^{d}\ 18'\ 1''\ 23'''$ à $19^{d}\ 49'\ 3''\ 55'''$. BC ſera par conſéquent à AC comme la différence $0^{d}\ 31'\ 2''\ 32'''$ de ces mouvemens au dernier mouvement de $19^{d}\ 49'\ 3''\ 55'''$, c'eſt-à-dire, comme 1 à $38\frac{3}{10}$; ſoit enſuite tirée par le point D la ligne indéfinie Gg, qui touche le cercle en D; & ſoit pris l'angle BCE ou BCF égal au double de la

Fig. 10.

diſtance du Soleil au lieu du nœud qui eſt trouvé par le mouvement moyen ; enfin ſoit tirée *AE* ou *AF* qui coupe la perpendiculaire *DG* en *G* ; & ſoit pris un angle qui ſoit au mouvement total du nœud entre ſes ſyzygies (c'eſt-à-dire à 9^d $11'$ $3''$) comme la tangente *DG* à la circonférence entiere du cercle *BED* ; cet angle (au lieu duquel on peut prendre l'angle *DAG*) étant ajouté au mouvement moyen des nœuds lorſqu'ils paſſent des quadratures aux ſyzygies, & étant ſouſtrait de ce mouvement moyen lorſqu'ils paſſent des ſyzygies aux quadratures, on aura leur mouvement vrai. Car le réſultat de cette opération s'accorde à très-peu de choſe près avec ce que l'on trouveroit en exprimant le temps par l'aire *NTA* − *NdZ* & le mouvement du nœud par l'aire *NAe* : comme on peut s'en aſſurer par le calcul.

C'eſt-là l'équation ſemeſtre du mouvement des nœuds. Il y a auſſi une équation de ce mouvement pour chaque mois, mais elle n'eſt pas néceſſaire pour trouver la latitude de la Lune. Car la variation de l'inclinaiſon de l'orbe de la Lune au plan de l'écliptique, éprouve une double inégalité, l'une tous les ſix mois, & l'autre tous les mois ; cette inégalité de tous les mois & l'équation des nœuds pour chaque mois ſe compenſent & ſe corrigent tellement l'une l'autre, qu'on peut les négliger en déterminant la latitude de la Lune.

Cor. Il eſt clair, par cette Propoſition & par la précédente, que les nœuds ſont ſtationnaires dans leurs ſyzygies ; que dans leur quadratures ils rétrogradent d'un mouvement horaire de $16''$ $19'''$ 26^{iv} ; & que l'équation du mouvement des nœuds dans les octans eſt de 1^d $30'$, ce qui s'accorde très-bien avec les phénoménes céleſtes.

S C H O L I E.

J. Machin profeſſeur d'aſtronomie à *Gresham* & *Henri Pemberton* M. D. ont trouvé chacun de leur côté le mouvement des nœuds

par une autre méthode que la précédente, & on a fait mention de cette autre méthode dans un autre lieu. Les écrits de l'un & de l'autre que j'ai vûs, contenoient chacun deux Propositions & s'accordoient parfaitement. Je joindrai ici l'écrit du Docteur *Machin* parce qu'il m'est tombé plutôt entre les mains.

DU MOUVEMENT DES NŒUDS DE LA LUNE.

PROPOSITION PREMIERE.

Le mouvement moyen du Soleil depuis le nœud, se trouve en prenant une moyenne proportionnelle géométrique entre le mouvement moyen du Soleil, & le mouvement médiocre avec lequel le Soleil s'éloigne le plus vîte du nœud dans les quadratures.

Fig. 11. *Soient* T *le lieu où est la terre*, N n *la ligne des nœuds de la Lune dans un temps quelconque donné*, K T M *une ligne tirée à angles droits sur cette ligne*, T A *une droite qui tourne autour du centre avec la même vîtesse angulaire que celle avec laquelle le Soleil & le nœud s'éloignent l'un de l'autre, ensorte que l'angle compris entre la ligne* N n *qui est en repos, & la ligne* T A *qui tourne, soit toujours égal à la distance des lieux du Soleil & du nœud. Cela posé, si on divise une ligne quelconque* T K *dans les parties* T S *&* S K *qui soient comme le mouvement horaire moyen du Soleil au mouvement moyen horaire du nœud dans les quadratures, & qu'on prenne* T H *moyenne proportionnelle entre la partie* T S *& la toute* T K, *cette ligne sera proportionnelle au mouvement moyen du Soleil depuis le nœud.*

Soit décrit du centre T *& du rayon* T K *le cercle N K M n. Du même centre & des demi axes* T H, T N *soit décrite ensuite l'ellipse* H N n L, *si dans le temps que le Soleil s'éloigne du nœud de la quantité de l'arc quelconque* N a, *on imagine une ligne passant toujours par l'extrémité* a *de cet arc, l'aire du secteur* N T a *représentera la somme des mouvemens du nœud & du Soleil dans le même temps. Soit* A a *le petit arc*

arc que la ligne T b a *décrit ainsi en tournant uniformément dans une petite portion de temps donnée, le petit secteur* T A a *sera donc comme la somme des vitesses avec laquelle le Soleil & le nœud sont transportés chacun dans leur temps.*

LIVRE TROISIEME.

Fig. 11.

La vitesse du Soleil est presqu'uniforme, ensorte que sa petite inégalité ne produit aucune altération sensible dans le mouvement moyen des nœuds.

L'autre partie de cette somme, c'est-à-dire, la vitesse du nœud dans sa médiocre quantité, augmente, en s'éloignant des syzygies, en raison doublée du sinus de sa distance au Soleil; par le Cor. de la Prop. 31. *du troisiéme Livre des Principes, & comme elle est la plus grande dans les quadratures avec le Soleil en* K, *elle a la même raison à la vitesse du Soleil que* S K *à* S T, *c'est-à-dire, qu'elle est comme la différence des quarrés de* T K *& de* T H, *ou comme le rectangle* K M H *est à* TH^2. *Mais l'ellipse* N B H *partage le secteur* A T a, *qui exprime la somme de ces deux vitesses, en deux parties* A B b a *&* B T b *proportionnelles à ces mêmes vitesses. Soit donc prolongée* B T *jusqu'à ce qu'elle atteigne le cercle en* β; *soit ensuite menée par* B *perpendiculairement au grand axe la ligne* B G, *qui, prolongée des deux côtés, rencontrera le cercle aux points* F & f, *& l'on verra que l'espace* A B b a *étant au secteur* T B b *comme le rectangle* $AB \times B\beta$ *est à* BT^2 (*à cause que ce rectangle est égal à la différence des quarrés de* T A *& de* T B, *à cause de la ligne* A β *coupée également & inégalement en* T *& en* B) *la proportion qui est entre ces deux quantités, lorsque l'espace* A B b a *est le plus grand en* K, *devient la même que la raison du rectangle* K M H *à* HT^2, *mais la plus grande vitesse médiocre du nœud étoit à la vitesse du Soleil en cette même raison: donc le secteur* A T a *sera divisé dans les quadratures en parties proportionnelles aux vitesses. Et parce que le rectangle* $KH \times HM$ *est à* HT^2 *comme* $FB \times Bf$ *à* BG^2, *& que le rectangle* $AB \times B\beta$ *est égal au rectangle* $FB \times Bf$, *la petite aire* A B b a, *lorsqu'elle est la plus grande, sera au secteur restant* T B b, *comme le rectangle* $AB \times B\beta$ *à* BG^2; *mais la raison de ces petites aires aux secteurs restans est en général celle*

Fig. 11.

des rectangles AB × Bβ *à* BT². *Donc l'aire* ABba *sera plus petite au lieu* A *que l'aire semblable dans les quadratures, en raison doublée de* BG *à* BT, *c'est-à-dire, en raison doublée du sinus de la distance du Soleil au nœud. Donc la somme de toutes les petites aires* ABba, *c'est-à-dire, l'espace* ABN *sera comme le mouvement du nœud dans le temps dans lequel le Soleil s'éloigne du nœud par l'arc* NA. *Et l'espace restant, ou, ce qui revient au même, le secteur elliptique* NTB *sera comme le mouvement moyen du Soleil dans le même temps. Or comme le moyen mouvement annuel du nœud est celui qui a lieu dans le temps que le Soleil acheve sa période, le mouvement moyen du nœud depuis le Soleil sera au mouvement moyen du Soleil, comme l'aire circulaire à l'aire elliptique, c'est-à-dire, comme la droite* TK *à la droite* TH *qui est moyenne proportionnelle entre* TK *&* ST; *ou, ce qui revient au même, comme cette moyenne proportionnelle* TH *à la ligne* TS.

PROPOSITION II.

Le mouvement moyen des nœuds de la Lune étant donné, trouver leur mouvement vray.

Fig. 11.

Soit l'angle A *la distance du Soleil au lieu moyen du nœud, ou le mouvement moyen du Soleil depuis le nœud. En prenant l'angle* B *tel que sa tangente soit à la tangente de l'angle* A, *comme* TH *à* TK, *c'est-à-dire, en raison sousdoublée du mouvement horaire médiocre du Soleil au mouvement horaire médiocre du Soleil depuis le nœud placé dans les quadratures; cet angle* B *sera la distance du Soleil au lieu vrai du nœud.*

Car tirant FT, *l'angle* FTN *sera, par la démonstration de la Prop. précédente, la distance du Soleil au lieu moyen du nœud, l'angle* ATN *sa distance au lieu vrai, & les tangentes de ces angles seront entr'elles comme* TK *à* TH.

Cor. *Donc* FTA *est l'équation des nœuds de la Lune, & le sinus de cet angle, lorsqu'il est le plus grand dans les octans, est au rayon comme* KH *à* TK + TH. *Dans un autre lieu quelconque* A *le sinus de cette équation est au plus grand sinus, comme le sinus de la somme*

des angles FTN + ATN *au rayon : c'est-à-dire, environ comme le sinus de* 2FTN *double de la distance du Soleil au lieu moyen du nœud est au rayon.*

Fig. 11.

SCHOLIE.

Si le mouvement horaire médiocre des nœuds dans les quadratures, est de $16'' \; 16''' \; 37^{iv} \; 42^{v}$, *c'est-à-dire, qu'il soit dans une année entiere sidérale de* $39^{d} \; 38' \; 7'' \; 50'''$. *On aura* TH *à* TK *en raison sousdoublée du nombre* 9,0827646 *au nombre* 10,0827646, *ou, ce qui revient au même, comme* 18,6524761 *à* 19,6524761. *Et par conséquent on aura* TH : HK :: 18,6524761 : 1, *c'est-à-dire, comme le mouvement du Soleil dans une année sidérale au moyen mouvement du nœud qui est de* $19^{d} \; 18' \; 1'' \; 23'''\frac{2}{3}$.

Mais si le mouvement moyen des nœuds de la Lune en 20 *années Juliennes est de* $386^{d} \; 51' \; 15''$, *comme on le déduit des observations employées dans la théorie de la Lune : le mouvement moyen des nœuds dans une année sidérale, sera de* $19^{d} \; 20' \; 31'' \; 58'''$, *&* TH *sera à* HK *comme* 360^{d} *à* $19^{d} \; 2' \; 31'' \; 58'''$, *c'est-à-dire, comme* 18,61214 *à* 1. *Delà, on tire le mouvement horaire médiocre des nœuds dans les quadratures de* $16'' \; 18''' \; 48^{iv}$. *Et la plus grande équation des nœuds dans les octans de* $1^{d} \; 29' \; 57''$.

PROPOSITION XXXIV. PROBLÉME XV.

Trouver la variation horaire de l'inclinaison de l'orbe de la Lune sur le plan de l'écliptique.

Soient *A* & *a* les syzygies ; *Q* & *q* les quadratures ; *N* & *n* les nœuds ; *P* le lieu de la Lune dans son orbe ; *p* la projection de ce lieu dans le plan de l'écliptique, & *m T l* le mouvement momentané des nœuds calculé comme ci-dessus. Fig. 10.

Si sur la ligne *Tm* on abbaisse la perpendiculaire *PG*, qu'on tire la ligne *pG*, qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre *Tl* en *g*, & qu'on tire *Pg* : l'angle *PGp* sera l'inclinaison de l'orbite de la Lune au plan de l'écliptique, lorsque la Lune est en *P* ; l'angle *Pgp* l'inclinaison du même orbe l'instant d'après, & par consé-

quent l'angle GPg la variation momentanée de l'inclinaison. Or cet angle GPg est à l'angle GTg en raison composée de TG à PG, & de Pp à PG. Donc, en mettant une heure pour le moment du temps; & par conséquent (par la Prop. 30.) $33''\ 10'''\ 33^{iv} \times \frac{IT \times AZ \times PG}{AT^3}$, pour l'angle GTg, l'angle GPg, ou la variation horaire de l'inclinaison sera à l'angle de $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, comme $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^3. *C. Q. F. T.*

Fig. 12.

Ce qu'on vient de dire a lieu dans la supposition que la Lune tourne uniformément dans un orbe circulaire. Mais si cet orbe est elliptique, le mouvement médiocre des nœuds diminuera dans la raison du petit axe au grand axe; comme on l'a fait voir ci-dessus. Et la variation de l'inclinaison diminuera aussi dans la même raison.

Cor. 1. Si on éleve TF perpendiculaire sur Nn, qu'on prenne pM pour le mouvement horaire de la Lune dans le plan de l'écliptique; qu'on prolonge les perpendiculaires pK, Mk à QT, jusqu'à ce qu'elles rencontrent TF en H & en h; on aura $IT : AT :: Kk : Mp$, & $TG : Hp :: TZ : AT$; donc $IT \times TG$ sera égal à $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, c'est-à-dire, à l'aire $HpMh$ multipliée par la raison de $\frac{TZ}{Mp}$; & par conséquent la variation horaire de l'inclinaison sera à $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, comme l'aire $HpMh$ multipliée par $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^3.

Cor. 2. Donc, si la terre & les nœuds étoient retirés à la fin de chaque heure de leurs lieux nouveaux, & qu'ils fussent toujours ramenés à leurs premiers lieux en un instant, ensorte que leur position donnée demeurât la même pendant un mois entier périodique, toute la variation de l'inclinaison dans ce même temps seroit à $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, comme le produit de la somme de toutes les aires $HpMh$, décrites pendant la révolution

Fig. 12.

du point p, par la quantité $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ est à $Mp \times AT^3$, c'est-à-dire, comme le cercle entier $QAqa$ multiplié par $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $Mp \times AT^3$, ou, ce qui revient au même, comme la circonférence $QAqa \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $2\,Mp \times AT^2$.

Cor. 3. Ainsi dans une position donnée des nœuds, la variation horaire médiocre, qui étant continuée uniformément pendant un mois, produiroit cette variation entiére, est à $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, comme $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $2\,AT^2$, ou comme $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ à $PG \times 4\,AT$, c'est-à-dire, (puisque Pp est à PG comme le sinus de l'inclinaison dont on vient de parler au rayon, & que $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ est à $4\,AT$ comme le sinus du double de l'angle ATn au quadruple du rayon) comme le sinus de cette même inclinaison multiplié par le sinus du double de la distance des nœuds au Soleil, est au quadruple du quarré du rayon.

Cor. 4. Puisque la variation horaire de l'inclinaison, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, est (par cette Prop.) à l'angle de $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, comme $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à AT^3, c'est-à-dire, comme $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ à $2\,AT$, ou, ce qui revient au même, comme le sinus du double de la distance de la Lune aux quadratures multiplié par $\frac{Pp}{PG}$ est au double du rayon; la somme de toutes les variations horaires pendant le temps que la Lune passe de la quadrature à la syzygie dans cette position des nœuds (c'est-à-dire dans un espace de 177 heures & $\frac{1}{2}$) sera à la somme d'autant d'angles de $33''\ 10'''\ 33^{iv}$, laquelle est $5878''$, comme la somme de tous les sinus du double de

 la diſtance de la Lune aux quadratures, multipliée par $\frac{Pp}{PG}$ eſt

Fig. 12. à la ſomme d'autant de diamétres; c'eſt-à-dire, comme le diamétre multiplié par $\frac{Pp}{PG}$ à la circonférence. Or cette proportion, ſi l'inclinaiſon eſt ſuppoſée de $5^d\, 1'$, devient celle de $7 \times \frac{874}{10000}$ à 22, ou de 278 à 10000. Donc la variation totale compoſée de la ſomme de toutes les variations horaires qui ont eu lieu dans le temps dont on vient de parler, eſt de 163″ ou de 2′ 43″.

PROPOSITION XXXV. PROBLÉME XVI.

Trouver pour un temps donné l'inclinaiſon de l'orbe de la Lune au plan de l'écliptique.

Fig. 13. AD étant le ſinus de la plus grande inclinaiſon, & AB le ſinus de la plus petite, ſoit coupée BD en deux parties égales au point C, & ſoit décrit du centre C & de l'intervalle BC le cercle BGD. Soit priſe enſuite ſur AC, CE en même raiſon à EB que EB à $2\,BA$: ſoit fait l'angle AEG égal au double de la diſtance des nœuds aux quadratures pour le temps donné, abbaiſſant alors GH perpendiculaire ſur AD, AH ſera le ſinus de l'inclinaiſon cherchée.

Car $GE^2 = GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Donc, puiſque $2EC$ eſt donné, GE^2 ſera comme AH. Que AEg repréſente le double de la diſtance des nœuds aux quadratures à la fin d'un moment quelconque de temps donné, l'arc Gg, à cauſe que l'angle GEg eſt donné ſera comme la diſtance GE. Mais $Hh : Gg :: GH : GC$, & par conſéquent Hh eſt comme $GH \times Gg$ ou $GH \times GE$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{GH}{GE} \times GE^2$ ou $\frac{GH}{GE} \times AH$, ou, ce qui revient au même, en rai-

fon compofée de *A H* & du finus de l'angle *A E G*. Donc, fi la ligne *A H* eft dans quelque cas égale au finus d'inclinaifon, elle augmentera par les mêmes incrémens que ce finus, fuivant le Cor. 3. de la Prop. précédente, & par conféquent elle demeurera toujours égale à ce finus. Mais la ligne *A H* eft égale à ce finus, lorfque le point *G* tombe en *B* ou en *D*. Donc elle lui eft toujours égale. *C. Q. F. D.*

Fig. 13.

J'ai fuppofé dans cette démonftration que l'angle *B E G*, qui eft le double de la diftance des nœuds aux quadratures, augmentoit uniformément, parce qu'il feroit fuperflu en cette occafion d'avoir égard à la petite inégalité de cette augmentation.

Suppofons maintenant que l'angle *B E G* foit droit, & que dans ce cas *G g* foit l'augmentation horaire du double de la diftance des nœuds au Soleil, la variation horaire de l'inclinaifon fera alors (par le Cor. 3. de la derniére Propofition) à $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$ comme le produit du finus d'inclinaifon *A H* & du finus de l'angle droit *B E G*, qui eft le double de la diftance des nœuds au Soleil, au quadruple du quarré du rayon; c'eft-à-dire, comme le finus *A H* de la médiocre inclinaifon eft au quadruple du rayon; ou, ce qui revient au même, (parce que cette inclinaifon médiocre eft prefque de $5^d \; 8' \frac{1}{2}$) comme fon finus 896, au quadruple du rayon 40000, ou comme 224 à 10000. Mais la variation totale qui répond à la différence *B D* des finus, eft à cette variation horaire, comme le diamétre *B D* à l'arc *G g*; c'eft-à-dire, en raifon compofée du diamétre *B D* à la demie circonférence *B G D*, & de la raifon de $2079\frac{7}{10}$ heures que le nœud employe à aller des quadratures aux fyzygies, à une heure; joignant donc toutes ces raifons, la variation totale *B D* fera à $33'' \; 10'''$ 33^{iv}, comme $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ à 110000, ou comme 29645 à 1000, & par conféquent cette variation *B D* fera de $16' \; 23'' \frac{1}{2}$.

C'eft-là la plus grande variation de l'inclinaifon tant qu'on ne fait pas attention au lieu de la Lune dans fon orbite. Car lorfque

Fig. 13.

les nœuds ſont dans les ſyzygies, cette inclinaiſon ne change point par la différente poſition de la Lune; mais ſi les nœuds ſont dans les quadratures, l'inclinaiſon eſt moindre lorſque la Lune eſt dans les ſyzygies, que lorſqu'elle eſt dans les quadratures, de 2′ 43″; comme nous l'avons dit dans le Cor. 4. de la Prop. précédente. Et la moitié de cette différence qui eſt de 1′ 21″ $\frac{1}{2}$ étant ôtée, la variation totale médiocre *BD* dans les quadratures de la Lune devient de 15′ 2″, & en l'ajoutant à cette variation dans les ſyzygies elle devient de 17′ 45″. Donc ſi la Lune ſe trouve dans les ſyzygies, la variation totale dans le paſſage des nœuds des quadratures aux ſyzygies ſera de 17′ 45″; & par conſéquent ſi l'inclinaiſon lorſque les nœuds ſont dans les ſyzygies eſt de 5 d 17′ 20″, elle ſera, lorſque les nœuds ſont dans les quadratures & la Lune dans les ſyzygies, de 4 d 59′ 35″. C'eſt ce qui ſe trouve confirmé par les obſervations.

Si enſuite on veut connoître cette inclinaiſon de l'orbe lorſque la Lune eſt dans les ſyzygies & que les nœuds ſont dans un lieu quelconque; il faut prendre *AB* à *AD* comme le ſinus de 4 d 59′ 35″ au ſinus de 5 d 17′ 20″, faiſant enſuite l'angle *AEG* égal au double de la diſtance des nœuds aux quadratures, *AH* ſera le ſinus de l'inclinaiſon cherchée.

L'inclinaiſon de cette orbite, lorſque la Lune eſt à 90 d des nœuds, eſt égale à celle qu'on vient de déterminer. Et dans les autres lieux de la Lune, l'inégalité pour chaque mois, qui ſe trouve dans la variation de l'inclinaiſon, ſe compenſe dans le calcul de la latitude de la Lune, & elle eſt en quelque façon corrigée par l'inégalité du mouvement des nœuds à chaque mois; (comme nous l'avons dit ci-deſſus) ainſi on peut la négliger dans le calcul de la latitude.

SCHOLIE.

J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvemens de la Lune qu'on pouvoit les déduire de la théorie de la gravité. J'ai trouvé encore

encore par la même théorie que l'équation annuelle du mouvement moyen de la Lune vient de la différente dilatation de l'orbe de la Lune par la force du Soleil, selon le Cor. 6. de la Prop. 66. liv. 1. car cette force étant plus grande dans le périgée du Soleil, elle dilate l'orbe de la Lune; & étant plus petite dans son apogée elle fait que l'orbe de la Lune se contracte. Or la Lune se meut plus lentement dans l'orbe dilaté, & plus vîte dans l'orbe contracté; l'équation annuelle par laquelle on compense cette inégalité est nulle dans l'apogée & dans le périgée du Soleil; dans la moyenne distance du Soleil à la terre elle monte jusqu'à 11′ 50″ environ, & dans les autres lieux elle est proportionnelle à l'équation du centre du Soleil; elle s'ajoute au moyen mouvement de la Lune lorsque la terre va de son aphélie à son périhélie, & elle s'en soustrait dans la partie opposée de l'orbite.

En prenant le rayon du grand orbe de 1000 parties, & l'excentricité de la terre de $16\frac{7}{8}$, cette équation, lorsqu'elle est la plus grande, devient par la théorie de la gravité de 11′ 49″. Mais l'excentricité de la terre paroît être un peu plus grande, augmentant donc l'excentricité cette équation doit augmenter dans la même raison. Ainsi si on suppose l'excentricité de $16\frac{11}{12}$, la plus grande équation sera de 11′ 51″.

J'ai trouvé aussi que dans le périhélie de la terre, l'apogée & les nœuds de la Lune alloient plus vîte, à cause de la plus grande force du Soleil, que dans son aphélie, & cela en raison triplée inverse de la distance de la terre au Soleil. Delà on tire que les équations annuelles de ces mouvemens sont proportionnelles à l'équation du centre du Soleil. Or le mouvement du Soleil est en raison doublée de la distance de la terre au Soleil inversement, & la plus grande équation du centre, que cette inégalité produit, est de 1ᵈ 56′ 20″ ce qui s'accorde avec l'excentricité du Soleil de $16\frac{11}{12}$ dont on vient de parler. Si le mouvement du Soleil étoit en raison triplée inverse de la distance, cette inégalité produiroit 2ᵈ 54′ 30″ pour la plus grande

équation. Donc les plus grandes équations que les inégalités des mouvemens de l'apogée & des nœuds de la Lune produisent sont à 2^d 54′ 30″ comme le mouvement moyen diurne de l'apogée & le mouvement moyen diurne des nœuds de la Lune sont au mouvement moyen diurne du Soleil. D'où il suit que la plus grande équation du mouvement moyen de l'apogée est de 19′ 43″ & que la plus grande équation du mouvement moyen des nœuds est de 9′ 24″; la premiére équation est additive & la derniére soustractive lorsque la terre va de son périhélie à son aphélie : c'est le contraire lorsqu'elle est dans la partie opposée de son orbite.

Par la théorie de la gravité il est certain que l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus forte lorsque le diamétre transversal de l'orbe de la Lune passe par le Soleil, que lorsque le même diamétre est perpendiculaire à la ligne qui joint le Soleil & la terre : & par conséquent l'orbe de la Lune est un peu plus grand dans le premier cas que dans le dernier. Delà on tire une autre équation du mouvement moyen de la Lune qui dépend de la situation de l'apogée de la Lune par rapport au Soleil, & cette équation est la plus grande lorsque l'apogée de la Lune est dans le même octant que le Soleil ; & elle est nulle lorsque l'apogée parvient aux quadratures ou aux syzygies : elle s'ajoute au mouvement moyen dans le passage de l'apogée de la Lune de la quadrature du Soleil à la syzygie, & elle se soustrait dans le passage de l'apogée de la syzygie à la quadrature. Cette équation, que j'appellerai équation sémestre, monte jusqu'à 3′ 45″ environ dans les octans de l'apogée lorsqu'elle est la plus grande, autant que je l'ai pu conclure des phénoménes. C'est-là sa quantité dans la médiocre distance du Soleil à la terre : mais elle doit être augmentée & diminuée en raison triplée de la distance du Soleil inversement, donc, dans la plus grande distance du Soleil elle est de 3′ 34″, & dans la plus petite de 3′ 56″ à peu près : lorsque l'apogée de la Lune est située hors des octans elle

devient moindre, & elle est à la plus grande équation comme le sinus du double de la distance de l'apogée de la Lune à la prochaine syzygie ou à la prochaine quadrature est au rayon.

Par la même théorie de la gravité l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus grande, lorsque la ligne droite menée par les nœuds de la Lune passe par le Soleil, que lorsque cette ligne coupe à angles droits la ligne qui joint la terre & le Soleil. Ce qui donne une autre équation du mouvement moyen de la Lune, que j'appellerai seconde semestre, laquelle est la plus grande lorsque les nœuds sont dans les octans du Soleil, & qui s'évanouit lorsqu'ils sont dans les quadratures ou dans les syzygies; dans les autres positions des nœuds, elle est proportionnelle au sinus du double de la distance de l'un ou l'autre nœud à la prochaine syzygie ou quadrature: elle doit s'ajouter au moyen mouvement de la Lune, si le Soleil s'éloigne en antécédence du nœud dont il est le plus voisin, & se retrancher s'il s'en éloigne en conséquence; dans les octans, où elle est la plus grande, elle va à 47″ dans la moyenne distance du Soleil à la terre, ainsi que je le trouve par la théorie de la gravité. Dans les autres distances du Soleil, cette plus grande équation, dans les octans des nœuds, est réciproquement comme le cube de la distance du Soleil à la terre, & par conséquent, dans le périgée du Soleil elle monte environ à 49″, & dans son apogée à 45″ environ.

Par la même théorie de la gravité l'apogée de la Lune avance le plus lorsqu'il est en opposition ou en conjonction avec le Soleil, & il rétrograde le plus lorsqu'il est en quadrature avec le Soleil. Dans le premier cas l'excentricité est la plus grande, & dans le second elle est la moindre, par les Cor. 7. 8. & 9. de la Prop. 66. du Liv. 1. & ses inégalités, par ces mêmes Corollaires, sont les plus grandes, & produisent l'équation principale de l'apogée que j'appelle semestre. La plus grande équation semestre est de 12^{d} 18′ à peu près, autant que je l'ai pu conclure des observations. *Horroxius* notre compatriote est le premier qui ait assuré que la Lune faisoit

ſa révolution dans une ellipſe autour de la terre qui eſt placée dans ſon foyer inférieur. *Halley* a mis le centre de cette ellipſe dans un épicycle dont le centre tourne uniformement autour de la terre. Et de ce mouvement dans l'épicycle naiſſent les inégalités dans la progreſſion & la régreſſion de l'apogée, dont on a parlé, ainſi que la quantité de l'excentricité.

Fig. 14. Suppoſant que la diſtance médiocre de la Lune à la terre ſoit diviſée en 100000 parties, que *T* ſoit la terre, & *TC* l'excentricité médiocre de la Lune de 5505 parties. Soit prolongée *TC* en *B*, enſorte que *BC* ſoit le ſinus de la plus grande équation ſemeſtre de $12^d\ 18'$ pour le rayon *TC* & le cercle *BDA* décrit du centre *C* & du rayon *BC* ſera cet épicycle dans lequel le centre de l'orbe de la Lune eſt placé, & fait ſa révolution ſelon l'ordre des lettres *B D A*. Soit enſuite pris l'angle *BCD* égal au double argument annuel, ou au double de la diſtance du vrai lieu du Soleil à l'apogée de la Lune corrigé en premier lieu, *CTD* ſera l'équation de l'apogée ſemeſtre de la Lune, & *TD* l'excentricité de ſon orbe tendant vers l'apogée corrigé en ſecond lieu. Ayant l'excentricité, le mouvement moyen, & l'apogée de la Lune, ainſi que le grand axe de ſon orbe de 200000 parties, on en tirera, par les méthodes ordinaires, le lieu vrai de la Lune dans ſon orbe, & ſa diſtance à la terre.

Le centre de l'orbe de la Lune ſe meut plus vîte autour du centre *C* dans le périhélie de la terre que dans ſon aphélie, à cauſe de la plus grande force du Soleil, & cela en raiſon triplée inverſe de la diſtance de la terre au Soleil. A cauſe de l'équation du centre du Soleil compriſe dans l'argument annuel, le centre de l'orbe de la Lune ſe meut plus vîte dans l'épicycle *BDA* en raiſon doublée inverſe de la diſtance de la terre au Soleil. Afin donc d'augmenter la vîteſſe de ce centre dans la raiſon ſimple inverſe de la diſtance , du centre *D* de l'orbe ſoit tirée la droite *DE* vers l'apogée de la Lune, ou parallelement à la ligne *TC*, & ſoit pris l'angle *EDF* égal à l'excès de l'argument annuel dont

on a parlé sur la distance de l'apogée de la Lune au périgée du Soleil en conséquence; ou, ce qui est la même chose, soit pris l'angle *CDF* égal au complément de la vraie anomalie du Soleil à 360 dégrés. Soit fait ensuite *DF* à *DC* en raison composée de la double excentricité du grand orbe à la distance médiocre du Soleil à la terre, & du mouvement moyen diurne du Soleil depuis l'apogée de la Lune, au moyen mouvement diurne du Soleil depuis son propre apogée, c'est-à-dire, en raison composée de $33\frac{7}{8}$ à 1000 & de $52' \, 27'' \, 16'''$ à $59' \, 8'' \, 10'''$, ou simplement dans la raison de 3 à 100.

Fig. 14.

Supposé que le centre de l'orbe de la Lune soit placé dans le point *F* & dans un épicycle dont le centre soit *D* & le rayon *DF*, & qu'il fasse sa révolution tandis que le point *D* avance dans la circonférence du cercle *DABD*. Par ce moyen la vîtesse, avec laquelle le centre de l'orbe de la Lune parcourera la ligne courbe décrite autour du centre *C*, sera, à peu près, en raison renversée du cube de la distance du Soleil à la terre, comme cela doit être.

Le calcul de ce mouvement est très-difficile, mais on peut le rendre plus aisé par l'approximation suivante. Prenant toujours 100000 parties pour la distance médiocre de la Lune à la terre, & 5505 pour l'excentricité *TC*; la ligne *CB* ou *CD* sera de $1172\frac{3}{4}$ parties, & la ligne *DF* de $35\frac{1}{5}$. Cette ligne, à la distance *TC*, soustend l'angle à la terre que la translation du centre de l'orbe du lieu *D* aulieu *F* produit dans le mouvement de ce centre : & cette même droite étant doublée dans une position parallele à la ligne qui joint la terre & le foyer supérieur de l'orbe de la Lune, elle soustend le même angle, lequel est par conséquent celui que cette translation produit dans le mouvement du foyer; & à la distance de la Lune à la terre, elle soustend l'angle que cette même translation produit dans le mouvement de la Lune, ensorte que cet angle peut être appellé la seconde équation du centre. Cette équation, dans la médiocre distance

Fig. 14.

de la Lune à la terre, eſt, à peu près, comme le ſinus de l'angle que cette droite *DF* fait avec la ligne tirée du point *F* à la Lune, & lorſqu'elle eſt la plus grande, elle va juſqu'à 2′ 25″. L'angle que cette droite *DF* fait avec la ligne tirée du point *F* à la Lune, ſe trouve ou en ſouſtrayant l'angle *EDF* de l'anomalie moyenne de la Lune, ou en ajoutant la diſtance de la Lune au Soleil à la diſtance de l'apogée de la Lune à l'apogée du Soleil. Et la quatriéme proportionnelle au rayon, au ſinus de cet angle ainſi trouvé, & à 2′ 25″ eſt la ſeconde équation du centre qu'il faut ajouter, ſi cette ſomme eſt moindre qu'un demi cercle, ou ſouſtraire ſi elle eſt plus grande. C'eſt ainſi qu'on aura la longitude de la Lune dans les ſyzygies même des luminaires.

Comme l'atmoſphere de la terre réfracte la lumiére du Soleil juſqu'à la hauteur de 35 ou 40 milles, qu'en la réfractant elle la repand autour de l'ombre de la terre, & que la lumiére ainſi éparſe dans les confins de l'ombre l'étend & la dilate, j'ajoute une minute ou une minute & un tiers au diamétre de l'ombre que produit la parallaxe dans les éclipſes de Lune.

Au reſte, la théorie de la Lune doit être examinée & établie par les Phénoménes, premiérement dans les ſyzygies, enſuite dans les quadratures, & enfin dans les octans. Dans cette vue, j'ai obſervé aſſez éxactement les mouvemens moyens de la Lune & du Soleil au méridien, dans l'obſervatoire royal de Greenwich, Et (pour le dernier jour de Décembre de l'année 1700 vieux ſtile) j'ai trouvé le mouvement moyen du Soleil à 20ᵈ 43′ 40″ du Capricorne, & ſon apogée à 7ᵈ 44′ 30″ du Cancer, & le moyen mouvement de la Lune à 15ᵈ 21′ 00″ du Verſeau, ſon apogée à 8ᵈ 20′ 00″ des Poiſſons, & ſon nœud aſcendant
9′ 16″ à 27ᵈ 24′ 20″ du Lion.

La différence méridienne de cet obſervatoire à l'obſervatoire
0ʰ 9′ 20″ royal de Paris eſt de 0ᵈ, 9′, 20″, mais on n'a pas encore le moyen mouvement de la Lune & de ſon apogée aſſez éxactement.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME XVII.

Trouver la force du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer.

Fig. 15.

On a vu, par la Prop. 25. de ce Livre, que la force *M L* ou *P T* du Soleil, pour troubler les mouvemens de la Lune, est dans les quadratures de la Lune, à la force de la gravité sur la terre, comme 1 à 638092, 6. & que la force $TM - LM$ ou $2\,PK$ dans les syzygies de la Lune est deux fois plus grande. Or ces forces, si on descendoit à la surface de la terre, diminueroient en raison des distances au centre de la terre, c'est-à-dire, en raison de $60\frac{1}{2}$ à 1; Donc, à la surface de la terre, la premiere de ces forces est à la force de la gravité comme 1 à 38604600. C'est par cette force que la mer est abbaissée dans les lieux qui sont éloignés du Soleil de 90 d. L'autre force, qui est deux fois plus grande, éleve la mer dans les régions situées sous le Soleil, & dans celles qui lui sont opposées. Ainsi la somme de ces forces est à la force de la gravité comme 1 à 12868200. Et parce que la même force produit le même mouvement, soit qu'elle abbaisse l'eau de la mer dans les régions distantes du Soleil de 90 dégrés, soit qu'elle l'éleve sous le Soleil & dans les régions opposées au Soleil, cette somme sera la force totale du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer, & elle fera le même effet que si elle étoit employée toute entiére à élever la mer dans les régions sous le Soleil ou opposées au Soleil, & qu'elle ne produisit aucun effet dans les régions distantes du Soleil de 90 d.

C'est-là la force du Soleil pour mouvoir la mer dans un lieu quelconque donné, lorsque le Soleil est dans le Zenith du lieu, & dans sa moyenne distance à la terre; mais dans les autres positions du Soleil, sa force pour élever l'eau de la mer est directement comme le sinus verse du double de sa hauteur sur l'horison du lieu, & inversement comme le cube de la distance du Soleil à la terre.

Cor. Comme la force centrifuge des parties de la terre produite par son mouvement diurne, laquelle force est à la force de la



gravité dans la raison de 1 à 289, est cause que la hauteur de l'eau sous l'équateur surpasse sa hauteur au pôle de 85472 pieds de Paris, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus dans la Prop. 19. il est clair que la force du Soleil dont il s'agit ici, laquelle est à la force de la gravité comme 1 à 12868200 & par conséquent à la force centrifuge comme 289 à 12868200, ou comme 1 à 44527, produira cet effet que la hauteur de l'eau dans les régions sous le Soleil & opposées au Soleil surpassera sa hauteur, dans les lieux distans du Soleil de 90 dégrés, d'un pied de Paris, 11 pouces $\frac{1}{30}$ puisque cette hauteur est à 85472 pieds comme 1 à 44527.

PROPOSITION XXXVII. PROBLÉME XVIII.

Trouver la force de la Lune pour mouvoir les eaux de la mer.

La force de la Lune pour mouvoir la mer se trouve par sa proportion avec la force du Soleil, & on peut conclure cette proportion de la proportion des mouvemens de la mer qui sont causés par ces deux forces.

A l'embouchure du fleuve d'*Avone* au-dessous de *Bristol* à la troisiéme pierre, dans l'Automne & le Printemps, l'ascension totale de l'eau, au temps de la conjonction & de l'opposition du Soleil & de la Lune, est environ de 45 pieds selon l'observation de *Samuel Sturmius*; dans les quadratures elle est de 25 pieds seulement. La premiere hauteur vient de la somme de ces forces, & la derniere de leur différence. Nommant donc S & L les forces du Soleil & de la Lune, lorsqu'ils sont dans l'équateur & dans leur moyenne distance de la terre, on aura $L+S:L-S$ $::45:25$ ou $::9:5$.

Dans le Port de *Plimouth*, *Samuel Colopressus* a observé que le flux monte dans sa médiocre hauteur à peu près à 16 pieds, & qu'au Printemps & à l'Automne la hauteur du flux dans les syzygies peut surpasser sa hauteur dans les quadratures de plus de 7 ou 8 pieds. Prenant 9 pieds pour la plus grande différence de ces hauteurs, on aura $L+S:L-S::20\frac{1}{2}:11\frac{1}{2}$ ou $::41:23$, laquelle

laquelle proportion se rapporte assez à la premiere. La grandeur du flux dans le port de *Bristol* semble donner plus de poids aux observations de *Sturmius*, ainsi jusqu'à ce qu'on ait trouvé quelque chose de plus certain, nous nous servirons de la proportion de 9 à 5.

Au reste, à cause des mouvemens réciproques des eaux, les plus grandes marées n'arrivent pas précisément dans les syzygies du Soleil & de la Lune, mais ce sont les troisiémes après les syzygies, comme on l'a dit; ou bien elles suivent de très-près le troisiéme passage de la Lune par le méridien du lieu après les syzygies, ou plutôt (comme l'a remarqué *Sturmius*) elles arrivent le troisiéme jour après celui de la nouvelle Lune, ou de la pleine Lune, ou un peu plus ou un peu moins après la 12 heure depuis la nouvelle ou la pleine Lune. Et par conséquent elles arrivent à peu près la quarante-troisiéme heure après la nouvelle ou la pleine Lune.

Elles arrivent dans ce port la septiéme heure environ après le passage de la Lune par le méridien du lieu; ainsi elles suivent de très-près le passage de la Lune par le méridien du lieu, lorsque la Lune est éloignée du Soleil, ou de l'opposition du Soleil d'environ 80 ou 90 dégrés en conséquence. L'Hyver & l'Eté les marées ont plus de force, non pas dans les solstices mêmes, mais lorsque le Soleil en est éloigné de la dixiéme partie du cercle, ou environ de 36 à 37 dégrés. De même, le plus grand flux arrive après le passage de la Lune par le méridien du lieu, lorsque la Lune est éloignée du Soleil environ de la dixiéme partie de tout l'espace qui est entre une marée & l'autre. Supposé que cette distance soit d'environ $18^{d}\frac{1}{2}$, la force du Soleil dans cette distance de la Lune aux syzygies & aux quadratures, sera moindre pour augmenter & diminuer le mouvement de la mer causé par la Lune, que dans ses syzygies & dans ses quadratures, & cela en raison du rayon au sinus de complément de cette distance doublée, ou de l'angle de 37^{d}, c'est-à-dire, en raison de 10000000 à 7986355.

Ainsi dans l'analogie ci-dessus on écrira pour S 0,7986355 S.

Mais il faut diminuer la force de la Lune dans les quadratures à cause de sa déclinaison. Car la Lune dans les quadratures, ou plutôt dans le $18\frac{1}{2}$ dégré après les quadratures, a une déclinaison d'environ $22^d\ 13'$. Et la force d'un astre sur la mer est moindre lorsqu'il s'éloigne de l'équateur, en raison doublée du sinus de complément de sa déclinaison à peu-près : & par conséquent la force de la Lune dans ses quadratures est seulement de 0,8570327 L. Donc on a $L + 0,7986355\,S$: $0,8570327\,L - 0,7986355\,S :: 9 : 5$.

De plus, les diamètres de l'orbite dans lequel la Lune feroit sa révolution sans excentricité, sont entr'eux comme 69 à 70 ; ainsi la distance de la Lune à la terre dans les syzygies, est à sa distance dans les quadratures, comme 69 à 70, toutes choses d'ailleurs égales : & ses distances dans le 18e dégré $\frac{1}{2}$ depuis les syzygies, où la marée est la plus grande, & dans le 18e dégré $\frac{1}{2}$ après les quadratures, où arrivent les plus petites marées, sont à sa moyenne distance comme 69,098747 & 69,897345 à $69\frac{1}{2}$. Mais les forces de la Lune pour mouvoir la mer sont en raison inverse triplée des distances : donc les forces, à la plus grande & à la plus petite de ces distances, sont à la force dans la médiocre distance, comme 0,9830427 & 1,017522 à 1. D'où l'on tire $1,017522\,L + 0,7986355\,S$ à $0,9830427 \times 0,8570327\,L - 0,7986355\,S$ comme 9 à 5. Et S à L comme 1 à 4,4815.

Ainsi la force du Soleil étant à la force de la gravité, comme 1 à 12868200, la force de la Lune sera à la force de la gravité comme 1 à 2871400.

Cor. 1. Comme l'eau par l'action du Soleil, monte à la hauteur d'un pied 11 pouces & $\frac{1}{30}$ de pouce, elle montera à 8 pieds 7 pouces & $\frac{5}{22}$ de pouces par l'action de la Lune, & par les forces réunies de ces deux astres elle montera à 10 pieds $\frac{1}{2}$, & lorsque la Lune est dans son périgée l'eau montera à la hauteur

de 12 pieds $\frac{1}{2}$ & plus, ſurtout ſi le flux eſt aidé par les vents qui ſouflent alors.

Une force de cette nature ſuffit pour cauſer tous les mouvemens de la mer, & elle répond aſſez éxactement à la quantité de ces mouvemens. Car dans les mers qui ont une grande largeur de l'Orient à l'Occident, comme dans la mer Pacifique, & dans les parties de la mer Atlantique & Ethiopique qui ſont au-delà des tropiques, l'eau monte ordinairement à la hauteur de 6, 9, 12 ou 15 pieds. Aureſte on prétend que dans la mer Pacifique qui eſt plus profonde & plus large que la mer Atlantique & la mer d'Ethiopie, les marées y ſont auſſi plus grandes. Et en effet, pour que le flux ſoit complet la largeur de la mer de l'Orient à l'Occident ne doit pas être moindre que de 90^{d}.

Dans la mer d'Ethiopie l'aſcenſion de l'eau entre les tropiques eſt moindre que dans les zones tempérées, à cauſe du peu de largeur de la mer entre l'Afrique & la partie auſtrale de l'Amérique. L'eau ne peut pas monter dans le milieu de la mer qu'elle ne deſcende en même temps vers l'un & l'autre rivage Oriental & Occidental; mais dans nos mers qui ſont plus reſſerrées, l'eau s'éleve à un rivage lorſqu'elle deſcend à l'autre; & par cette raiſon, le flux & le reflux ſont très-peu ſenſibles dans les iſles qui ſont fort loin de la terre ferme.

Dans de certains ports, où l'eau arrive avec impétuoſité après avoir rencontré beaucoup de bancs de ſable; & où elle eſt obligée de fluer & de refluer pour emplir & vuider tour à tour le golfe; le flux & le reflux doivent être plus grands, comme à *Plymouth*, au pont de *Chepſtown* en Angleterre, au mont *Saint Michel* & à *Avranches* en *Normandie*, à *Cambaie* & à *Pégu* dans l'Inde Orientale.

Dans ces lieux, la mer arrivant & ſe retirant avec une grande vîteſſe, elle inonde tantôt le rivage à pluſieurs milles & tantôt elle le laiſſe à ſec. Le choc de l'eau lorſqu'elle arrive & lorſqu'elle ſe retire, ne ceſſe que lorſqu'elle s'eſt élevée ou abbaiſſée de 30;

N ij

40, ou 50 pieds & plus. C'est la même chose dans les détroits oblongs & dans les mers pleines de bancs de sable, comme le détroit de *Magellan*, & les mers qui environnent l'*Angleterre*. Le flux dans ces ports & dans ces détroits augmente beaucoup par l'impétuosité avec laquelle la mer arrive & se retire. Mais sur les rivages près desquels la mer devient tout à coup très-large & très-profonde, & où l'eau peut s'élever & s'abbaisser sans s'y porter & s'en retirer avec impétuosité, la grandeur des marées répond aux forces du Soleil & de la Lune.

Cor. 2. La force de la Lune pour mouvoir la mer étant à la force de la gravité comme 1 à 2871400, il est clair, que cette force est beaucoup moindre que ce qu'il faudroit qu'elle fût pour qu'elle pût être apperçue, ou dans les expériences des pendules, ou dans toutes celles qu'on peut faire dans la statique & dans l'hydrostatique. Cette force de la Lune n'a d'effet sensible que dans les marées.

Cor. 3. Puisque la force de la Lune pour mouvoir la mer est à la force du Soleil sur la mer comme 4,4815 à 1, & que ces forces (par le Cor. 14. de la Prop. *66*. Liv. 1.) sont en raison composée des densités du Soleil & de la Lune & du cube de leurs diamétres apparens; la densité de la Lune doit être à la densité du Soleil comme 4,4815 à 1 directement, & comme le cube du diamétre de la Lune au cube du diamétre du Soleil inversement : c'est-à-dire, (les moyens diamétres apparens de la Lune & du Soleil étant de 31′ 16″½ & de 32′ 12″) comme 4891 à 1000. Or la densité du Soleil est à la densité de la terre comme 1000 à 4000; donc la densité de la Lune est à la densité de la terre comme 4891 à 4000, ou comme 11 à 9. Ainsi le globe de la Lune est plus dense & plus terrestre que notre terre.

Cor. 4. Puisque le vrai diamétre de la Lune est, selon les observations astronomiques, au vrai diamétre de la terre, comme 100 à 365; la masse de la Lune sera à la masse de la terre comme 1 à 39,788.

Cor. 5. La gravité accélératrice à la surface de la Lune, sera presque 3 fois moindre que la gravité accélératrice à la surface de la terre.

Cor. 6. La distance du centre de la Lune au centre de la terre, sera à la distance du centre de la Lune au commun centre de gravité de la Lune & de la terre comme 40,788 à 39,788.

Cor. 7. La médiocre distance du centre de la Lune au centre de la terre dans les octans de la Lune sera à peu près de $60\frac{2}{5}$ demi grands diamétres de la terre. Or le demi grand diamétre de la terre a été trouvé de 19658600 pieds de Paris : donc la médiocre distance des centres de la Lune & de la terre qui est de $60\frac{2}{5}$ de ces demi grands diamétres, aura 1187379440 pieds. Et cette distance (par le Cor. précédent) est à la distance du centre de la Lune au commun centre de gravité de la terre & de la Lune, comme 40,788 à 39,788. Ainsi cette derniere distance est de 1158268534 pieds. Or comme la Lune fait sa révolution, par rapport aux fixes, en 27 jours, 7 heures, $43'\frac{4}{5}$, le sinus verse de l'angle que la Lune décrit dans une minute, est de 12752341 parties pour un rayon de 1000,000000,000000, & de 14,7706353 pieds pour un rayon de 1158268534 pieds. Donc la Lune tombant vers la terre, par la même force qui la retient dans son orbite, parcoureroit dans une minute 14,7706353 pieds. En augmentant cette force en raison de $178\frac{29}{40}$ à $177\frac{29}{40}$, on aura la force totale de la gravité à l'orbe de la Lune par le Cor. de la Prop. 3. & la Lune tombant par cette force pendant une minute, parcourera 14,8538067 pieds. Donc, à la soixantiéme partie de la distance de la Lune au centre de la terre, c'est-à-dire, à la distance de 197896573 pieds du centre de la terre, un corps grave en tombant parcourera aussi dans une seconde 14, 8538067 pieds. Donc à la distance de 19615800 pieds, c'est-à-dire, à la distance du moyen demi diamétre de la terre, un corps grave en tombant parcourera dans une seconde 15,11175 pieds ou 15 pieds, 1 pouce, $4\frac{1}{11}$ lignes. C'est-là la quantité de la chute des graves à 45^{d} de latitude. Et par la table qu'on a

donné dans la Prop. 20. la quantité de cette descente sera plus grande à la latitude de *Paris* de $\frac{2}{5}$ de ligne environ. Donc, selon ce calcul, les graves en tombant dans le vuide à la latitude de *Paris*, parcoureroient 15 pieds de *Paris* 1 pouce & $4\frac{21}{33}$ lignes environ en une seconde. Si on retranche de la gravité la force centrifuge que le mouvement diurne de la terre produit à cette latitude, les graves, en y tombant, parcoureront dans une seconde 15 pieds 1 pouce & $1\frac{5}{9}$ lignes. Or on a fait voir, dans les Prop. 4. & 19. que les graves parcourent en effet cet espace en une seconde à la latitude de *Paris*.

Cor. 8. La moyenne distance des centres de la Lune & de la terre dans les syzygies de la Lune est de soixante demi grands diamétres de la terre, moins la trentiéme partie d'un demi diamétre environ. Dans les quadratures de la Lune, la moyenne distance de ces centres, est de $60\frac{5}{6}$ demi diamétres de la terre. Car ces deux distances sont à la distance moyenne de la Lune dans les octans comme 69 & 70 à $69\frac{1}{2}$ par la Prop. 28.

Cor. 9. La moyenne distance des centres de la Lune & de la terre dans les syzygies de la Lune est de $60\frac{1}{10}$ demi diamétres moyens de la terre. Et dans les quadratures de la Lune la distance moyenne de ces centres est de 61 demi diamétres moyens de la terre, moins la trentiéme partie d'un demi diamétre.

Cor. 10. Dans les syzygies de la Lune sa parallaxe horisontale médiocre est à 0, 30, 38, 45, 52, 60 & 90 dégrés de latitude, de 57′ 20″, 57′ 16″, 57′ 14″, 57′ 12″, 57′ 10″, 57′ 8″ & 57′ 4″ respectivement.

Dans ces calculs je n'ai point considéré l'attraction magnétique de la terre dont la quantité est très-petite & est ignorée. Si jamais on parvient à la connoître, & que les mesures des dégrés dans le méridien, la longueur des pendules isochrones à diverses latitudes, les loix du flux & du reflux, la parallaxe de la Lune, & les diamétres apparens du Soleil & de la Lune, soient exactement déterminés par les Phénomenes; on pourra refaire tout ce calcul plus exactement.

PROPOSITION XXXVIII. PROBLÉME XIX.

Trouver la figure de la Lune.

Si la Lune étoit fluide comme notre mer, la force de la terre pour élever les parties de ce fluide les plus proches & les plus éloignées de la terre, seroit à la force avec laquelle la Lune éleve les parties des eaux de notre mer situées sous la Lune & opposées à la Lune, en raison composée de la raison de la gravité accélératrice de la Lune vers la terre à celle de la terre vers la Lune, & de la raison du diamétre de la Lune au diamétre de la terre, c'est-à-dire, comme 39,788 × 100 à 1 × 365 ou comme 1081 à 100. Ainsi, comme la force de la Lune éleve notre mer à la hauteur de 8 pieds & $\frac{3}{5}$, le fluide de la Lune seroit élevé par la force de la terre à la hauteur de 93 pieds. Et par cette cause la forme de la Lune doit être celle d'un sphéroïde dont le grand diamétre prolongé passe par le centre de la terre, & surpasse l'autre diamétre qui lui est perpendiculaire de 186 pieds. La Lune a donc cette forme & doit l'avoir prise dès le commencement. *C. Q. F. T.*

Cor. C'est ce qui fait que la Lune présente toujours le même côté à la terre; car la Lune ne peut être en repos dans une autre position, mais elle doit toujours retourner à celle-là en oscillant. Cependant ces oscillations sont très-lentes, parce que les forces qui les produisent sont très-petites : ensorte que cette partie de la Lune qui devroit toujours être tournée vers la terre, peut regarder l'autre foyer de l'orbe lunaire (par la raison alléguée dans la Prop. 17.) & n'être pas ramenée en un instant vers la terre.

LEMME PREMIER.

Si APEp *représente la terre uniformement dense*, C *son centre*, AE *son équateur &* P, p *ses póles; que de plus*, Pape *soit la sphére inscrite, que* QR *représente le plan coupé perpendiculairement* Fig. 16.

Fig. 16. *par la droite tirée du centre du Soleil au centre de la terre ; qu'enfin toutes les particules qui composent l'excédent* PapAPepE *de la terre par-dessus la sphere inscrite, tendent à s'éloigner de ce plan* QR *avec un effort qui soit proportionnel à leur distance à ce plan : alors 1°. Toutes les particules qui sont placées dans le plan de l'équateur* AE, *& qui sont rangées également autour du globe en forme d'anneau, auront pour faire tourner la terre autour de son centre, une force qui sera à celle que toutes ces mêmes particules (placées par supposition dans le lieu de l'équateur le plus distant du plan* QR) *auroient pour faire mouvoir la terre d'un semblable mouvement circulaire autour de son centre, comme 1. est à 2.*

2°. Ce mouvement circulaire se fera autour d'un axe placé dans la commune section de l'équateur & du plan QR.

Fig. 17. Si du centre K & avec le diamétre IL on décrit le demi cercle $INLK$, qu'on suppose la demi circonférence INL partagée en un nombre infini de parties égales, & que de chacune de ces parties N on abbaisse le sinus NM sur le diamétre IL. La somme des quarrés de tous ces sinus NM sera égale à la somme des quarrés des sinus KM ; & l'une & l'autre somme sea égale à la somme des quarrés d'autant de demi diamétres KN ; donc la somme de tous les quarrés de tous les sinus NM sera sousdouble de la somme des quarrés d'autant de demi diamétres KN.

Fig. 16. Soit à présent divisé le périmétre du cerle AE en autant de parties égales, & par chacune de ces particules F soit abbaissée une perpendiculaire FG au plan QR, ainsi que du point A la perpendiculaire AH. La force par laquelle la particule F s'éloigne du plan QR sera comme cette perpendiculaire FG (par l'hypothése) & cette force, multipliée par la distance CG, sera l'efficacité de la particule F pour faire tourner la terre autour de son centre. Ainsi l'efficacité d'une particule au lieu F, sera à l'efficacité d'une particule au lieu A, comme $FG \times GC$ à $AH \times HC$, c'est-à-dire, $:: FC^2 : AC^2$; & par conséquent, l'efficacité de toutes les parties dans leurs lieux F sera à l'efficacité d'autant

de

de particules dans le lieu A, comme la somme de tous les FC^2 à la somme d'autant de AC^2, c'est-à-dire, par ce qui a déja été démontré, comme un à deux. *C. Q. F. D.* Fig. 16.

Et parce que ces particules agissent en s'éloignant perpendiculairement du plan QR, & cela également de chaque côté de ce plan ; elles font tourner la circonférence du cercle de l'équateur, ainsi que la terre qui y est attachée, au tour de l'axe qui est dans ce plan QR & dans le plan de l'équateur.

LEMME II.

Les mêmes choses étant posées, la force & l'efficacité que toutes les particules placées de toutes parts autour du globe, ont pour faire tourner la terre autour du même axe, est à la force qu'un même nombre de particules, supposé placées en forme d'anneau dans le cercle de l'équateur AE, *auroient pour faire tourner la terre d'un semblable mouvement circulaire, comme deux à cinq.*

Soit KI un cercle mineur quelconque parallele à l'équateur, & soient L, l, deux particules quelconques égales situées dans ce cercle hors du globe $Pape$. Si sur le plan QR, qui est perpendiculaire au rayon tiré au Soleil, on abbaisse les perpendiculaires LM, lm, toutes les forces avec lesquelles ces particules s'éloignent du plan QR seront proportionnelles à ces perpendiculaires. Supposé à présent que la droite Ll soit parallele au plan $Pape$; qu'elle soit coupée en deux parties égales au point X; & que par le point X on tire Nn qui soit parallele au plan QR & qui rencontre les perpendiculaires LM, lm, en N & en n; abbaissant XY perpendiculairement sur le plan QR, les forces contraires des particules L & l, pour faire tourner la terre en sens contraire, seront comme $LM \times MC$ & $lm \times mC$, c'est-à-dire, comme $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, ou $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$: & leur différence $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ sera la force de ces deux particules prises ensemble pour faire tourner Fig. 18.

Fig. 18.

la terre. La partie positive $LN \times Mm$ ou $2LN \times NX$ de cette différence, est à la force $2AH \times HC$ de deux particules de même grandeur placées en A, comme LX^2 à AC^2. Et la partie négative $NM \times \overline{MC + mC}$, ou $2XY \times CY$ est à la force $2AH \times HC$ de ces mêmes particules placées en A, comme CX^2 à AC^2. Donc la différence des forces de ces parties, c'est-à-dire, la force de deux particules L & l prises ensemble pour faire tourner la terre, est à la force de deux particules qui leur seroient égales & qui seroient placées dans le lieu A pour faire tourner la terre de la même maniére, dans la raison de $LX^2 - CX^2$ à AC^2. Mais si la circonférence IK est divisée en un nombre innombrable de parties égales L, toutes les LX^2 seront à autant de IX^2 comme 1 à 2 (par le Lemme 1.) & par conséquent à autant de AC^2 comme IX^2 à $2AC^2$; & autant de CX^2 à autant de AC^2 comme $2CX^2$ à $2AC^2$; donc les forces réunies de toutes les particules de la circonférence du cercle IK, sont aux forces réunies d'autant de particules dans le lieu A; comme $IX^2 - 2CX^2$ à $2AC^2$: & par conséquent, (par le Lemme 1.) aux forces réunies d'autant de particules dans la circonférence du cercle AE comme $IX^2 - 2CX^2$ à AC^2.

Si à présent le diamétre Pp de la sphere est divisé en un nombre innombrable de parties égales sur lesquelles s'élevent autant de cercles IK; la matiére du périmétre d'un de ces cercles quelconque IK sera comme IX^2: ainsi la force de cette matiere pour faire tourner la terre sera comme $IX^2 \times IX^2 - 2CX^2$. Mais la force de cette même matiere, si elle étoit placée dans le périmétre du cercle AE, seroit comme $IX^2 \times AC^2$. Donc la force de toutes les particules de la matiére placée dans le périmétre de tous ces cercles hors du globe, est à la force d'autant de particules de la matiére placées dans le périmétre du grand cercle AE, comme tous les $IX^2 \times IX^2 - 2CX^2$ à autant de $IX^2 \times AC^2$, c'est-à-dire, comme tous les $AC^2 - CX^2 \times AC^2 - 3CX^2$ à autant de $AC^2 - CX^2 \times AC^2$, ou,



Fig. 18.

ce qui revient au même, comme tous les $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ à autant de $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, ou encore, comme toute la quantité fluente, dont la fluxion est $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ est à toute la quantité fluente dont la fluxion est $AC^4, - AC^2 \times CX^2$; Et par conséquent, par la méthode des fluxions, comme $AC^4 \times CX - \frac{4}{3} AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5} CX^5$ à $AC^4 \times CX - \frac{1}{3} AC^2 \times CX^3$, c'est-à-dire, en écrivant au lieu de CX la ligne entière Cp ou AC, comme $\frac{4}{15} AC^5$ à $\frac{2}{3} AC^5$, ou comme 2 à 5. *C. Q. F. D.*

LEMME III.

Les mêmes choses étant posées, je dis que le mouvement dont nous avons parlé, de toute la terre entiere autour de l'axe, lequel mouvement est composé des mouvemens de toutes les particules, sera au mouvement du précédent anneau autour du même axe, dans une raison composée de la raison de la matière de la terre à la matiere de cet anneau, & de la raison de trois fois le quarré du quart de cercle à deux fois le quarré du diamètre, c'est-à-dire, en raison composée de la matiere à la matiere, & de 925275 à 1000000.

Car le mouvement d'un cylindre tournant autour de son axe supposé fixe, est au mouvement de la sphére inscrite, & qui tourne en même temps, comme quatre quarrés égaux sont à trois des cercles inscrits dans ces quarrés: & le mouvement du cylindre est au mouvement d'un anneau très-mince qui touche la sphére & le cylindre dans leur commun contact, comme le double de la matiére du cylindre est au triple de la matiére de l'anneau; & le mouvement de cet anneau continué uniformément autour de l'axe de ce cylindre est à son mouvement uniforme autour de son diamétre dans le même temps périodique, comme la circonférence du cercle est au double de son diamétre.

HYPOTHESE II.

Si l'anneau, dont on vient de parler, faisoit seul sa révolution autour du Soleil dans l'orbe de la terre par le mouvement annuel, tout le reste

de la terre étant ôté, & que cependant il tournât par le mouvement diurne autour de son axe incliné au plan de l'écliptique de $23\frac{1}{2}$ dégrés : le mouvement des points équinoxiaux seroit le même, soit que cet anneau fût fluide, soit qu'il fût formé d'une matiére solide.

PROPOSITION XXXIX. PROBLÉME XX.

Trouver la précession des Equinoxes.

Le mouvement horaire médiocre des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, a été trouvé de $16'' 35''' 16^{iv} 36^{v}$, & sa moitié $8'' 17''' 38^{iv} 18^{v}$ est le mouvement moyen horaire des nœuds dans cet orbe, par les raisons ci-dessus expliquées; ainsi ce mouvement dans une année entiere sidérale est de $20^{d}. 11' 46''$. Or, puisque les nœuds de la Lune dans un tel orbe feroient tous les ans $20^{d} 11' 46''$ en antécédence, & que s'il y avoit plusieurs Lunes, les mouvemens des nœuds de chacune seroient (par le Cor. 16. de la Prop. 66. du Liv. 1.) comme les temps périodiques; il s'ensuit, que si la Lune tournoit autour de la terre près de sa surface dans l'espace d'un jour sidéral, le mouvement annuel de ses nœuds seroit à $20^{d} 11' 46''$ comme un jour sidéral qui est de $23^{h} 56'$ au temps périodique de la Lune qui est de 27 jours $7^{h} 43'$, c'est-à-dire, comme 1436 à 39343. Il en seroit de même des nœuds d'un anneau de Lunes qui entoureroit la terre; soit que ces Lunes ne fussent pas contigues, soit qu'elles devinssent fluides & qu'elles formassent un anneau continu, soit enfin que la matiére de cet anneau s'endurcit & qu'il devint infléxible.

Fig. 18. Supposons donc que cet anneau soit égal en quantité de matiére à la partie de terre $PapAPepE$ qui est l'excédent du sphéroïde sur le globe $Pape$, ce globe étant à cet excédent du sphéroïde comme aC^2 à $AC^2 - aC^2$, c'est-à-dire, (à cause que le petit demi diamétre de la terre PC ou aC est au demi grand diamétre AC dans la raison de 229 à 230) comme 52441 à 459; si cet anneau entouroit la terre dans le sens de l'équateur,

& que l'un & l'autre tournassent ensemble autour du diamétre de l'anneau, le mouvement de l'anneau seroit au mouvement du globe intérieur (par le Lemme 3. de ce Livre) comme 459 à 52441 & 1000000 à 925275 conjointement, c'est-à-dire, comme 4590 à 485223; & par conséquent le mouvement de l'anneau seroit à la somme des mouvemens de l'anneau & du globe, comme 4590 à 489813. Ainsi si l'anneau étoit adhérent au globe, & qu'il lui communiquât son mouvement par lequel ses nœuds ou les points équinoxiaux rétrogradent: le mouvement qui resteroit à l'anneau seroit à son mouvement primitif comme 4590 à 489813; & par conséquent le mouvement des points équinoxiaux seroit diminué dans la même raison.

Le mouvement annuel des points équinoxiaux du corps composé de l'anneau & du globe, seroit donc au mouvement de 20^d $11' 46''$ comme 1436 à 39343, & 4590 à 489813 conjointement, c'est-à-dire, comme 100 à 292369. Mais les forces par lesquelles les nœuds des Lunes (comme je l'ai expliqué ci-dessus) & par conséquent les points équinoxiaux de l'anneau rétrogradent, c'est-à-dire, les forces $3IT$ sont, dans chaque particule, comme les distances de ces particules au plan QR, & c'est par ces forces que ces particules s'éloignent de ce plan; donc (par le Lemme 2.) si la matiére de l'anneau étoit répandue sur toute la superficie du globe, ensorte qu'elle formât sur la partie supérieure de la terre la figure $PapAPepE$, la force & l'efficacité de toutes les particules pour faire tourner la terre autour d'un diamétre quelconque de l'équateur, & par conséquent pour mouvoir les points équinoxiaux, deviendroit moindre qu'auparavant dans la raison de 2 à 5. Et par conséquent, la régression annuelle des points équinoxiaux sera à 20^d $11' 46''$ comme 10 à 73092, c'est-à-dire, qu'elle sera de $9'' 56''' 50^{iv}$. Fig. 6.

Au reste ce mouvement doit être diminué à cause de l'inclinaison du plan de l'équateur au plan de l'écliptique, c'est-à-dire, en raison du sinus 91706 (qui est le sinus de complément de $23^d\frac{1}{2}$)

au rayon 100000. Ainsi ce mouvement deviendra de 9'' 7''' 10iv. Et c'est-là la précession annuelle des équinoxes causée par la force du Soleil.

Mais la force de la Lune pour élever l'eau de la mer a été trouvée à la force du Soleil comme 4,4815 à 1 environ ; & la force de la Lune pour mouvoir les points équinoxiaux, est à la force du Soleil dans la même proportion ; donc la précession annuelle des points équinoxiaux, causée par la force de la Lune, doit être de 40'' 52''' 52iv. Ainsi la précession annuelle totale des équinoxes produite par ces deux forces, doit être de 50'' 00''' 12iv, & ce mouvement s'accorde avec les phénoménes, car la précession des équinoxes selon les observations astronomiques est annuellement d'environ 50''

Si la terre est plus haute à l'équateur qu'aux pôles de plus de 17 milles $\frac{1}{6}$, sa matiére doit être moins dense à la circonférence qu'au centre : & la précision des équinoxes devra être augmentée en vertu de cette plus grande hauteur de l'équateur & diminuée à cause de cette moindre densité.

Nous avons expliqué jusqu'à présent le systême du Soleil, de la terre, de la Lune & des planettes : il nous reste à traiter des cométes.

LEMME IV.

Les Cométes sont placées au-dessus de la Lune, & viennent dans la région des Planettes.

De même que le défaut de parallaxe diurne fait voir que les cométes sont au-dessus des régions sublunaires, leur parallaxe annuelle prouve qu'elles descendent dans la région des planettes. Car les cométes qui vont suivant l'ordre des signes sont toutes, vers la fin de leur apparition, de plus en plus retardées ou même rétrogrades, si la terre est entr'elles & le Soleil, & accélérées également, si la terre est en opposition. Au contraire, les cométes qui vont contre l'ordre des signes vont plus vîte vers la fin de leur apparition, si la terre se trouve entr'elles & le Soleil ; & elles vont plus lentement ou sont rétrogrades, si la terre

ſe trouve en oppoſition avec elles. Ces mouvemens apparens des cométes viennent principalement des mouvemens de la terre dans ſes différentes poſitions par rapport à elles, de même que les planettes nous paroiſſent quelquefois rétrogrades, quelquefois plus lentes & quelquefois plus promptes, ſelon que leur mouvement conſpire avec celui de la terre, ou qu'il lui eſt contraire. Si la terre va du même côté que la cométe, & qu'elle ſoit tranſportée autour du Soleil d'un mouvement angulaire qui ſurpaſſe aſſez celui de la cométe pour que la ligne qui ſuivroit continuellement la terre & la cométe convergeât du côté qui eſt par de-là la cométe, la cométe vue de la terre paroîtra alors rétrograde à cauſe de ſon mouvement plus lent; mais ſi la terre eſt mue plus lentement, le mouvement de la cométe (en retranchant celui de la terre) devient encore plus lent. Et lorſque la terre ira du côté oppoſé à celui de la cométe, la cométe paroîtra plus rapide. Or de cette accélération & de ce mouvement rétrograde on tire la diſtance de la cométe de la maniére ſuivante.

Soient ♈ *Q A*, ♈ *Q B*, ♈ *Q C* trois longitudes de la cométe, obſervées au commencement de ſon mouvement, & ſoit ♈ *Q F* la derniére longitude obſervée lorſque la cométe ceſſe d'être apperçue. Soit de plus tirée la ligne *A B C* dont les parties *A B*, *B C* ſéparées par les lignes *Q A* & *Q B*, *Q B* & *Q C*, ſoient entr'elles comme les temps écoulés entre les trois premieres obſervations. Soit prolongé *A C* juſqu'en *G*, enſorte que *A G* ſoit à *A B* comme le temps entre la premiere & la derniere obſervation, eſt au temps entre la premiere & la ſeconde, & ſoit enfin tirée la ligne *Q G*: ſi la cométe étoit mue uniformément dans une ligne droite, & que la terre fût en repos ou qu'elle avançât en ligne droite d'un mouvement uniforme; l'angle ♈ *Q G* feroit la longitude de la cométe au temps de la derniere obſervation. L'angle *F Q G*, qui eſt la différence de ces longitudes, eſt donc formé par l'inégalité des mouvemens de la terre & de la cométe. Cet angle, ſi la terre & la cométe vont vers des côtés oppoſés, étant ajouté à l'angle Fig. 19.

♈ *Q G* rendra le mouvement apparent de la cométe plus prompt: mais si la cométe & la terre vont vers le même côté, il faut soustraire l'angle *F Q G* de ce même angle ♈ *Q G*, & cette soustraction rendra le mouvement apparent de la cométe plus lent, ou même rétrograde, comme je viens de le faire voir. Cet angle est formé principalement par le mouvement de la terre, & par conséquent on peut le prendre pour la parallaxe de la cométe, en négligeant le petit décrément ou le petit incrément de cet angle qui peut naître de l'inégalité du mouvement de la cométe dans son orbe.

Fig. 20. On tire de cette parallaxe la distance de la cométe en cette maniére. Que *S* représente le Soleil, *a c T* le grand orbe, *a* le lieu de la terre dans le temps de la premiere observation, *c* son lieu dans le temps de la troisiéme, *T* celui où elle se trouve dans le temps de la derniere, & *T* ♈ la ligne droite tirée vers le commencement d'*Aries*. Soit pris l'angle ♈ *T V* égal à l'angle ♈ *Q F*, c'est-à-dire, à la longitude de la cométe lorsque la terre est en *T*. Soit de plus tirée *a c* prolongée en *g*, ensorte que *a g* : *a c* :: *A G* : *A C*, & *g* sera le lieu que la terre auroit atteint au temps de la derniere observation par un mouvement continué uniformément dans la ligne droite *a c*. Donc si on tire la ligne *g* ♈ parallele à *T* ♈, & qu'on fasse l'angle ♈ *g V* égal à l'angle ♈ *Q G*, cet angle ♈ *g V* sera égal à la longitude de la cométe vue du lieu *g*; & l'angle *T V g* sera la parallaxe qui vient de la translation de la terre du lieu *g* au lieu *T*: & par conséquent *V* sera le lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Ce lieu *V* est ordinairement inférieur à l'orbe de Jupiter.

On conclut la même chose de la courbure du chemin des cométes. Ces corps marchent à peu près dans de grands cercles pendant qu'ils se meuvent avec leur plus grande vîtesse; mais dans la fin de leurs cours, où cette partie de leur mouvement apparent qui vient de la parallaxe a une plus grande proportion au mouvement total apparent, elles ont coutume de s'écarter de ces cercles,

eles, & lorsque la terre se meut vers un côté du ciel, elles vont vers le côté opposé. Cette déflexion vient principalement de la parallaxe, car elle répond au mouvement de la terre; & la grandeur de cette déflexion prouve, selon mon calcul, que les cométes, lorsqu'elles disparoissent, sont placées assez loin au-dessous de Jupiter. Et par conséquent dans leur périgée & leur périhélie, où elles sont plus proches, elles descendent souvent au-dessous des orbes de Mars & des planettes inférieures.

La proximité des cométes se confirme encore par la lumiére de leurs têtes. Car l'éclat d'un corps céleste, éclairé du Soleil & qui s'éloigne à de très-grandes distances, diminue en raison quadruplée de sa distance : c'est-à-dire, dans une raison doublée à cause que la distance de ce corps au Soleil augmente, & dans une autre raison doublée à cause de la diminution de son diamétre apparent. Ainsi si la quantité de la lumiére & le diamétre apparent d'une cométe sont donnés, on aura sa distance, en disant, cette distance est à la distance d'une planette en raison directe du diamétre au diamétre, & en raison sousdoublée inverse de l'illumination à l'illumination.

Flamstead observant le plus petit diamétre de la chevelure de la cométe de 1682 le trouve de 2′ 0″ avec une lunette de 16 pieds armée d'un micrométre, le noyau ou l'étoile qui étoit dans le milieu de la tête occupoit à peine la dixiéme partie de cette largeur, ainsi son diamétre étoit seulement de 11″ ou 12″. Mais l'illumination & l'éclat de sa tête surpassoit celle de la tête de la cométe de 1680, & elle étoit presque aussi brillante que les étoiles de la premiere ou de la seconde grandeur. Supposons que sa lumiere fut environ sousquadruple de celle de Saturne & de son anneau : comme la lumiere de l'anneau étoit presque égale à celle du globe & que le diamétre apparent du globe étoit presque de 21″, la lumiére du globe & de l'anneau égaloient ensemble la lumiére d'un globe de 30″ de diamétre : ainsi la distance de la cométe étoit à la distance de Saturne comme 1 à $\sqrt{4}$ inver-

ſement & comme 12″ à 30″ directement, c'eſt-à-dire, comme 24 à 30 ou comme 4 à 5.

La cométe qui parut au mois d'*Avril* 1665. ſurpaſſoit par ſon éclat, ſelon *Hevelius*, preſque toutes les étoiles fixes, & même Saturne par la vivacité de ſa lumiére. Ainſi cette cométe étoit plus brillante que celle qui avoit paru à la fin de l'année précédente. Laquelle cependant avoit été jugée auſſi brillante que les étoiles de la premiere grandeur. Le diamétre de ſa chevelure étoit preſque de 6′ & ſon noyau étant comparé aux planettes par le ſecours d'une lunette, étoit ſans aucun doute plus petit que Jupiter, & paroiſſoit quelquefois égaler le globe de Saturne, & quelquefois il paroiſſoit plus petit. Or comme le diamétre de la chevelure des cométes paſſe rarement 8′ ou 12′, & que celui du noyau ou de l'étoile centrale eſt preſque la dixiéme ou même quelquefois la quinziéme partie du diamétre de la chevelure, il eſt clair que ces étoiles ont pour la plûpart la même grandeur apparente que les planettes. Ainſi comme on peut ordinairement comparer leur lumiére avec celle de Saturne & que quelquefois elle la ſurpaſſe ; il eſt clair que toutes les cométes dans leur périhélie ſont au-deſſous de Saturne ou très-peu au-deſſus. Ceux donc qui les placent dans la région des étoiles fixes, ſe trompent extrêmement : car à cette diſtance elles ne devroient pas être plus éclairées par notre Soleil que les planettes de notre ſyſtême le ſont par les étoiles fixes.

En traitant toutes ces choſes, nous n'avons pas fait attention à l'obſcurciſſement des cométes cauſé par la fumée épaiſſe & abondante qui entoure leurs têtes, & qui fait que leur lumiére paroît vue comme à travers un nuage.

Plus cette fumée obſcurcit les cométes, plus il faut qu'elles approchent du Soleil afin que la lumiére qu'elles réfléchiſſent puiſſe être preſque égale à celle des planettes : d'où il eſt très-vraiſemblable que les cométes deſcendent beaucoup au-deſſous de l'orbe de Saturne comme nous l'avons prouvé par la parallaxe.

La même chose se trouve amplement confirmée par leurs queues, ces queues sont formées ou par la réfléxion de la fumée éparse dans l'Ether, ou par la lumiére de la tête des cométes. Dans le premier cas on doit diminuer la distance des cométes, car sans cela, il faudroit supposer que cette fumée qui s'exhale sans cesse de leurs têtes est propagée dans un espace immense avec une vîtesse & une expansion incroyable. Dans le dernier cas, on attribue toute la lumiére de la queue & de la chevelure au noyau de la tête; or si nous concevons que toute cette lumiére est rassemblée & resserrée dans le disque du noyau, il est certain que ce noyau, toutes les fois que la cométe a une queue trés-grande & très-éclatante, devroit être beaucoup plus brillant que Jupiter : car donnant plus de lumiére & ayant un plus petit diamétre apparent, il doit être beaucoup plus éclairé & beaucoup plus près du Soleil que Jupiter. Bien plus, lorsque leur tête est cachée sous le Soleil, & que leurs queues paroissent, ainsi qu'il arrive quelquefois, comme de grandes poutres enflammées, on doit par le même raisonnement les placer au-dessous de l'orbe de Venus; car si toute cette lumiére est supposée rassemblée en une étoile, elle doit surpasser de beaucoup Venus en clarté.

On doit conclure la même chose de la lumiére des têtes des cométes qui croît lorsqu'elles s'éloignent de la terre & qu'elles vont vers le Soleil, & qui décroît lorsqu'elles s'éloignent du Soleil & reviennent vers la terre. Ainsi la derniere cométe de l'année 1665. (comme l'a observé *Hevelius*) perdoit toujours de son mouvement apparent depuis qu'il eut commencé à l'appercevoir, & par conséquent elle avoit devancé le périgée; mais cependant la lumiére de sa tête n'en augmentoit pas moins de jour en jour, jusqu'à ce qu'enfin étant plongée dans les rayons du Soleil elle cessa d'être visible. Le mouvement de la cométe de 1683 (observée par le même *Hevelius*) étoit très-lent à la fin du mois de *Juillet* que l'on commença à l'appercevoir, car elle ne faisoit alors environ que 40 ou 45 minutes de son orbe par jour, depuis ce

temps son mouvement diurne augmenta continuellement jusqu'au 4 *Septembre* qu'il étoit presque de 5 dégrés; or pendant tout ce temps la cométe s'approcha de la terre ainsi qu'on pouvoit s'en assurer par le diamétre de sa tête mesuré avec le micrométre : car *Hevelius* le trouva le 6 *Aoust* de 6′ 5″ seulement, y compris la chevelure; mais le 2 *Septembre* il étoit de 9′ 7″, ce qui rendoit sa tête plus petite au commencement de son mouvement que vers la fin. Cependant dans le commencement comme elle étoit près du Soleil, elle paroissoit beaucoup plus brillante que vers la fin, comme le rapporte le même *Hevelius*, & pendant tout ce temps, quoiqu'elle s'approchât de la terre, sa lumiére diminua toujours, parce qu'elle s'éloignoit du Soleil.

Le mouvement de la cométe de 1618 fut le plus prompt vers le milieu du mois de Décembre, & celui de la cométe de 1680 vers la fin du même mois, ces cométes étoient par conséquent alors dans leur périgée, & cependant leurs têtes furent les plus brillantes environ 15 jours auparavant, lorsqu'elles sortoient des rayons du Soleil, & le plus grand éclat de leurs queues avoit été quelque temps auparavant, lorsqu'elles étoient le plus près du Soleil.

La tête de la cométe de 1618 paroissoit, selon les observations de *Cysatus* faites le premier *Décembre*, plus grande que les étoiles de la premiere grandeur, & le 16 *Décembre* (étant alors dans son périgée) sa grandeur étoit fort diminuée, mais sa lumiére & son éclat l'étoient beaucoup davantage, & le 7 *Janvier Kepler* ne pouvant plus appercevoir sa tête cessa de l'observer.

La tête de la cométe de 1680 fut observée le 12 *Décembre* par *Flamstead* à la distance de 9 dégrés du Soleil, & alors sa lumiére parut à peine égaler celle des étoiles de la troisiéme grandeur. Le 15 & le 17 *Décembre* elle lui parut comme les étoiles de la troisiéme grandeur, lorsque leur lumiére est diminuée par celle des nuées vers le Soleil couchant. Le 26 *Décembre* elle se mouvoit beaucoup plus vîte, & par conséquent elle étoit plus près de son périgée, & alors elle étoit plus petite que l'étoile de la troisiéme grandeur

de la bouche de *Pégaze*, le 3 *Janvier* elle paroiſſoit de la quatriéme, le 9 de la cinquiéme & le 13 elle diſparut à cauſe de la clarté de la Lune qui l'effaçoit. Le 25 *Janvier* elle égaloit à peine la lumiére des étoiles de la ſeptiéme grandeur.

Si on prend des temps égaux avant & après ſon périgée, ſa tête, qui étoit alors dans des régions très-éloignées, auroit dû paroître également brillante, puiſqu'alors elle étoit également éloignée de la terre, mais elle parut beaucoup plus brillante lorſqu'elle fut du côté du Soleil, & preſque éteinte de l'autre côté du périgée. On doit donc conclure de la grande différence qui ſe trouva entre ſa lumiére dans l'une & l'autre poſition, qu'elle étoit très-près du Soleil dans la premiere; car la lumiére des cométes a coutume d'être réguliére & de paroître plus vive, lorſque leur tête ſe meut plus vîte, & qu'elles ſont par conſéquent dans leur périgée, ſi ce n'eſt à moins que l'augmentation de leur clarté ne vienne de leur plus grande proximité du Soleil.

Cor. 1. Les cométes brillent donc parce qu'elles réfléchiſſent la lumiére du Soleil.

Cor. 2. On doit voir par ce qui a été dit, pourquoi les cométes s'approchent ſi fort du Soleil. Si elles étoient vûes dans les régions beaucoup au-delà de Saturne, elles devroient paroître plus ſouvent dans les parties du ciel oppoſées au Soleil; & celles qui ſeroient placées dans ces parties du ciel ſeroient plus voiſines de la terre; & le Soleil étant interpoſé obſcurciroit les autres. Mais en parcourant l'hiſtoire des cométes, j'ai trouvé qu'on en a découvert quatre ou cinq fois plus dans l'hémiſphére qui eſt vers le Soleil que dans l'hémiſphére oppoſé, outre beaucoup d'autres qu'il n'eſt pas douteux que les rayons du Soleil n'ayent empêché d'être viſibles. Certainement lorſqu'elles deſcendent vers nos régions, elles n'ont point de queues & par conſéquent elles ne ſont point encore aſſez éclairées du Soleil pour qu'on puiſſe les appercevoir à la ſimple vûe, & l'on ne les apperçoit que lorſqu'elles ſont plus près de nous que Jupiter. La plus grande partie de l'eſpace qu'elles décrivent autour du

Soleil, lorsqu'elles en sont très-près, est du côté de la terre qui regarde le Soleil ; & par conséquent les cométes étant alors plus près du Soleil, elles en sont plus éclairées.

Cor. 3. Il suit delà, que les espaces célestes sont dénués de toute résistance ; car les cométes suivent des routes obliques & quelquefois contraires à celles des planettes, & elles se meuvent très-librement en tout sens, & conservent très-long-temps leurs mouvemens, même ceux qui se font contre l'ordre des signes.

Je me trompe beaucoup si les cométes ne sont pas des corps de même genre que les planettes, & si elles ne circulent pas perpétuellement dans un même orbe, car l'opinion de quelques-uns qui prétendent que ce sont des météores, étant fondée sur les changemens continuels qui arrivent à leur tête, tombe d'elle-même par tout ce qu'on vient de voir.

Les têtes des cométes sont environnées de très-grands atmosphéres, & ces atmosphéres doivent être plus denses en enbas. Ainsi les changemens qu'on apperçoit dans les cométes sont vûs dans les nuages de ces atmosphéres & non dans les corps mêmes des cométes. De même que la terre vue des planettes ne renverroit la lumiére que par les nuages qui l'environnent & la cachent, il est très-vraisemblable aussi que les bandes de Jupiter qui sont mobiles sur cet astre sont formées dans les nuées qui l'entourent & qui font que nous l'appercevons plus difficilement. Or les corps des cométes qui sont environnés de nuages plus profonds & plus denses doivent être bien plus difficiles à appercevoir.

PROPOSITION XL. THÉORÉME XX.

Les cométes se meuvent dans des sections coniques dont le foyer est dans le centre du Soleil, & elles décrivent autour de cet astre des aires proportionnelles au temps.

Cette Proposition est claire par le Cor. 1. de la Prop. 13. Liv. 1. & par les Prop. 8. 12 & 13. de ce troisiéme Livre.

Cor. 1. Delà il suit, que si les cométes tournent dans des orbes,

ces orbes ſont des ellipſes, & leurs temps périodiques doivent être aux temps périodiques des planettes en raiſon ſeſquiplée de leurs grands axes. Donc la plus grande partie des cométes faiſant leur révolution dans des orbes qui renferment ceux des planettes, & qui ſont par conſéquent plus grands que les leurs, elles doivent ſe mouvoir plus lentement qu'elles : enſorte que ſi l'axe de l'orbe d'une cométe eſt quatre fois plus grand que l'axe de l'orbe de Saturne, le temps de la révolution de la cométe ſera au temps de la révolution de Saturne, c'eſt-à-dire, à 30 ans, comme $4\sqrt{4}$ (ou 8) à 1, ainſi elle ſera de 240 ans.

Cor. 2. Les orbes des cométes approchent beaucoup de la parabole, enſorte même qu'on peut, ſans erreur ſenſible, les prendre pour des paraboles.

Cor. 3. Et par conſéquent (par le Cor. 7. de la Prop. 16 Liv. 1.) la vîteſſe de toute cométe ſera toujours, à peu près, à la vîteſſe d'une planette quelconque qui tourne dans un cercle autour du Soleil, en raiſon ſouſdoublée du double de la diſtance de la planette au centre du Soleil, à la diſtance de la cométe au même centre.

Suppoſons que le rayon du grand orbe, ou le demi grand diamétre de l'ellipſe dans laquelle la terre tourne ait 100000000 parties, & que la terre dans ſon mouvement médiocre diurne en parcoure 1720212 parties, & $71675\frac{1}{2}$ parties par heure, une cométe qui ſeroit à la même diſtance médiocre du Soleil que la terre, & qui auroit une vîteſſe qui ſeroit à celle de la terre comme $\sqrt{2}$ à 1, parcoureroit dans ſon mouvement diurne 2432747 parties, & $101364\frac{1}{2}$ parties par heure, & dans les plus grandes & les plus petites diſtances, le mouvement tant diurne qu'horaire ſera à ce mouvement diurne & horaire en raiſon ſouſdoublée des diſtances réciproquement, & par conſéquent il ſera donné.

Cor. 4. Donc, ſi le paramétre de la parabole eſt quadruple du rayon du grand orbe, & qu'on ſuppoſe que le quarré de ce rayon eſt de 100000000 parties, l'aire que la cométe décrira autour

du Soleil ſera chaque jour de $1216373\frac{1}{2}$ parties, & à chaque heure cette aire ſera de $50682\frac{1}{4}$ parties, ſi le paramétre eſt plus ou moins grand dans une raiſon quelconque, l'aire diurne & horaire ſera plus grande ou plus petite en la même raiſon ſouſ-doublée.

LEMME V.

Trouver la ligne parabolique qui paſſe par un nombre quelconque de points donnés.

Fig. 21. Soient ces points donnés A, B, C, D, E, F, *&c.* & ſoient abaiſſées de ces points, à une droite quelconque HN donnée de poſition, les perpendiculaires AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Cas 1. Si les intervalles HI, IK, KL, *&c.* des points H, I, K, L, M, N ſont égaux, raſſemblez les premieres différences b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, *&c.* des perpendiculaires AH, BI, CK, *&c.* les ſecondes c, $2c$, $3c$, $4c$, *&c.* les troiſiémes d, $2d$, $3d$, *&c.* c'eſt-à-dire, que $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, *&c.* qu'enſuite

$$\begin{array}{ccccccccc} b & & 2b & & 3b & & 4b & & 5b \\ & c & & 2c & & 3c & & 4c & \\ & & d & & 2d & & 3d & & \\ & & & e & & 2e & & & \\ & & & & f & & & & \end{array}$$

$b - 2b = c$ *&c.* & qu'on parvienne ainſi à la derniére différence ſuppoſée f, qu'on éleve enfin une perpendiculaire quelconque RS laquelle ſoit une ordonnée à la courbe cherchée : on aura ſa longueur de la maniére ſuivante, ſuppoſé que les intervalles HI, IK, KL, LM, *&c.* ſoient des unités, & que $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p \times -IS = q$, $\frac{1}{3}q \times +SK = r$, $\frac{1}{4}r \times +SL = s$, $\frac{1}{5}s \times +SM = t$; & en continuant ainſi juſqu'à la pénultiéme perpendiculaire ME

ME, & mettant des signes négatifs aux termes *HS*, *IS*, &c. qui sont du côté de *A* par rapport à *S*, & des signes positifs aux termes *SK*, *SL*, &c. qui sont de l'autre côté du point *S*. Et en ayant attention de placer ces signes comme il convient, on aura $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Fig. 21.

Cas 2. Si les intervalles *HI*, *IK*, &c. des points *H*, *I*, *K*, *L*, &c. sont inégaux, prenez les différences premieres b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ des perpendiculaires *AH*, *BI*, *CK*, &c. divisées par les intervalles de ces perpendiculaires, les secondes différences c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. divisées par les seconds intervalles, les troisiémes d, $2d$, $3d$, &c. divisées par les troisiémes intervalles, les quatriémes e, $2e$, &c. divisées par les quatriémes intervalles, & ainsi de suite, c'est-à-dire, de sorte que $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. ensuite $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. & enfin $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Ayant trouvé ces différences, soient nommées $AH = a$, $-HS = p$, $p \times -IS = q$, $q \times + SK = r$, $r \times + SL = s$, $s \times + SM = t$, & ainsi de suite jusqu'à la pénultiéme perpendiculaire *ME*, l'ordonnée cherchée *RS* sera $= a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Cor. On peut trouver par-là, à peu près, les aires de toutes les courbes; car si on a quelques points d'une courbe quelconque qu'on se propose de quarrer, & qu'on imagine une parabole menée par ces mêmes points : l'aire de cette parabole sera à peu près la même que celle de la courbe qu'on doit quarrer; or on a des méthodes très-connues par lesquelles on peut toujours quarrer géométriquement les paraboles.

LEMME VI.

Fig. 21. *Ayant observé quelques-uns des lieux d'une comète, trouver son lieu dans un temps quelconque intermédiaire donné.*

Que *HI*, *IK*, *KL*, *LM* représentent les temps qui se sont écoulés entre les observations; *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* les cinq longitudes observées de la comète; *HS* le temps donné entre la premiere observation & la longitude cherchée; si on suppose une courbe régulière *ABCDE* qui passe par les points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, on trouvera par le Lemme précédent son ordonnée *RS*, & cette ligne sera la longitude cherchée.

Par la même méthode ayant observé cinq latitudes, on trouvera la latitude à un temps donné.

Si les différences des longitudes observées sont petites, comme de 4 ou 5 dégrés seulement; il suffira de 3 ou 4 observations pour trouver la latitude & la longitude nouvelle. Si les différences sont plus grandes, comme de 10 ou 20 dégrés; il faudra employer cinq observations.

LEMME VII.

Tirer par le point donné P une ligne droite B C, dont les parties PB, P C coupées par deux droites A B, A C, données de position, ayent l'une à l'autre une raison donnée.

Fig. 22. Du point *P* soit menée une ligne droite *PD* à l'une de ces lignes comme *AB*, & soit prolongée cette ligne vers l'autre droite *AC* jusqu'en *E*, ensorte que *PE* soit à *PD* dans la raison donnée; soit tirée de plus *EC* parallele à *AD*; en menant *CPB*, on aura *PC* : *PB* :: *PE* : *PD*. *C. Q. F. F.*

LEMME VIII.

Fig. 23. *Soit* A B C *une parabole dont le foyer soit S, que la corde* A C *coupée en deux au point* I *retranche le segment* A B C I, *dont le diamétre soit* I μ *& le sommet* μ. *Soit pris sur* I μ *prolongée* μ O *égale à la*

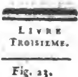


Fig. 23.

moitié de Iμ, soit tirée OS que l'on prolonge en ξ ensorte que Sξ soit égale à 2SO. Si la comète B se meut dans l'arc CBA & qu'on tire ξB qui coupe AC en E; le point E retranchera de la corde AC un segment AE à peu près proportionnel au temps.

Car soit tiré *EO* coupant l'arc parabolique *ABC* en *Y*, & soit aussi tiré μX qui touche le même arc à son sommet μ, & qui rencontre *EO* en *X*; l'aire curviligne $AEX\mu A$ sera à l'aire curviligne $ACY\mu A$ comme *AE* à *AC*. Or comme le triangle *ASE* est au triangle *ASC* dans la même raison, l'aire totale $ASEX\mu A$ sera à l'aire totale $ASCY\mu A$ comme *AE* à *AC*. Mais à cause que ξO est à *SO* comme 3 à 1, & que *EO* est à *XO* dans la même raison, *SX* sera parallele à *EB* : & par conséquent si on tire *BX*, le triangle *SBE* sera égal au triangle *XEB*. Donc si à l'aire $ASEX\mu A$ on ajoute le triangle *EXB*, & que de cette somme on ôte le triangle *SEB*, il restera l'aire $ASBX\mu A$ égale à l'aire $ASEX\mu A$, & elle sera par conséquent à l'aire $ASCY\mu A$ comme *AE* à *AC*. Mais l'aire $ASBY\mu A$ est égale, à peu près, à l'aire $ASBX\mu A$, & cette aire $ASBY\mu A$ est à l'aire $ASCY\mu A$ comme le temps employé à décrire l'arc *AB* est au temps employé à décrire l'arc total *AC* : donc *AE* sera à *AC*, à très-peu de choses près, dans la raison des temps. *C. Q. F. D.*

Cor. Lorsque le point *B* devient le sommet μ de la parabole, *AE* est exactement à *AC* dans la raison des temps.

SCHOLIE.

Si on tire $\mu\xi$ qui coupe *AC* en δ & qu'on prenne dessus ξn qui soit à μB comme 27 *MI* à 16 $M\mu$: ayant tiré *Bn* elle coupera la corde *AC* dans la raison des temps plus exactement qu'auparavant. Le point *n* doit tomber au-delà du point ξ si le point *B* est plus éloigné du sommet principal de la parabole que le point μ & il doit tomber au contraire en-deça si le point *B* est moins éloigné de ce même sommet.

Fig. 24.

LEMME IX.

Les droites $I\mu$, μM & $\frac{AI \times IC}{4 S\mu}$ *sont égales entr'elles.*

Car $4 S\mu$ est le paramétre de la parabole pour le sommet μ.

LEMME X.

Si on prolonge $S\mu$ *jusqu'en* N & *en* P, *ensorte que* μN *soit la troisiéme partie de* $I\mu$, & *que* $SP : SN :: SN : S\mu$, SP *sera la hauteur à laquelle la cométe auroit une vîtesse capable de lui faire parcourir un arc égal à la corde* AC *dans un temps égal à celui qu'elle employe à parcourir l'arc* $A\mu C$.

Car si cette cométe dans le même temps avançoit uniformément dans la ligne droite qui touche la parabole en μ, avec la vîtesse qu'elle a en μ; l'aire qu'elle décriroit autour du point S seroit égale à l'aire parabolique $ASC\mu$. Ainsi le produit de la partie de la tangente qu'elle décriroit alors & de la droite $S\mu$, seroit au produit de AC par SM, comme l'aire $ASC\mu$ au triangle ASC, c'est-à-dire, comme SN à SM. C'est pourquoi AC est à la partie de la tangente qui a été décrite, comme $S\mu$ à SN. Or comme la vîtesse de la cométe à la hauteur SP est (par le Cor. 6. de la Prop. 16. Liv. 1.) à sa vîtesse à la hauteur $S\mu$, en raison soufdoublée inverse de SP à $S\mu$, c'est-à-dire, en raison de $S\mu$ à SN; la droite décrite avec cette vîtesse dans le même temps sera à la partie de la tangente qui a été décrite, comme $S\mu$ à SN. Donc AC & la droite décrite avec cette nouvelle vîtesse étant à la longueur décrite sur la tangente dans cette même raison, elles sont égales entr'elles. *C. Q. F. D.*

Cor. Donc la cométe avec la vîtesse qu'elle a à la hauteur $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$ décriroit dans le même temps la corde AC à peu près.

LEMME XI.

Fig. 24.

Si une comète privée de tout mouvement tombe vers le Soleil de la hauteur SN ou $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$, & que la force qui la pousse dans le commencement de cette chute soit conservée la même pendant tout le temps qu'elle tombe ; elle décrira en descendant un espace égal à la droite $I\mu$ dans la moitié du temps dans lequel elle auroit parcouru dans son orbe l'arc AC.

Car la comète, dans le temps pendant lequel elle décrit l'arc parabolique *AC*, décriroit dans le même temps la corde *AC* avec la vîtesse qu'elle avoit à la hauteur *SP* (par le dernier Lemme) : ainsi (par le Cor. 7. de la Prop. 16. Liv. 1.) en faisant dans le même temps, par la force de sa gravité, sa révolution dans un cercle dont le demi diamétre seroit *SP*, elle décriroit un arc dont la longueur seroit à la corde *AC* de l'arc parabolique en raison sousdoublée de 1 à 2. Et par conséquent tombant vers le Soleil de la hauteur *SP* avec la même force avec laquelle elle pesoit sur le Soleil à cette même hauteur, elle parcoureroit dans la moitié de ce temps (par le Cor. 9. de la Prop. 4. du Liv. 1.) un espace égal au quarré de la moitié de cette corde divisé par le quadruple de la hauteur *SP*, c'est-à-dire, l'espace $\frac{AI^2}{4SP}$. Ainsi comme le poids de la comète sur le Soleil à la hauteur *SN* est à son poids sur le Soleil à la hauteur *SP* dans la raison de *SP* à $S\mu$, la comète, par le poids qu'elle a à la hauteur *SN*, décrira, en tombant vers le Soleil dans le même temps, un espace $\frac{AI^2}{4S\mu}$, c'est-à-dire, un espace égal à $I\mu$ ou à μM. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XLI. PROBLÊME XXI.

Déterminer par trois observations données la trajectoire d'une comète dans une parabole.

J'ai tenté de beaucoup de maniéres la solution de ce Problême

DU SYSTEME DU MONDE.

qui eſt très-difficile ; pour y parvenir j'avois réſolu les Problêmes du premier Livre qui y ont rapport. Mais enſuite je ſuis parvenu à la ſolution que je vais donner, laquelle eſt un peu plus ſimple.

Fig. 23. Soient choiſies trois obſervations dont les intervalles de temps ſoient les plus égaux qu'il eſt poſſible ; & que cependant l'intervalle du temps où la cométe ſe meut plus lentement ſoit un peu plus grand que l'autre, enſorte, par exemple, que la différence de ces temps ſoit à leur ſomme comme leur ſomme à 600 jours plus ou moins : ou que le point E tombe à peu près ſur le point M, & que de-là il ſe détourne plus vers I que vers A. Si on n'a pas de telles obſervations, il faudra trouver un nouveau lieu de la cométe par le Lemme 6.

Fig. 25. Que S déſigne le Soleil ; T, t, τ trois lieux de la terre dans ſon grand orbe ; TA, tB, τC trois longitudes obſervées de la cométe ; V le temps écoulé entre la premiere & la ſeconde obſervation ; W le temps écoulé entre la ſeconde & la troiſiéme ; & X la droite que la cométe peut parcourir pendant tout ce temps avec la vîteſſe qu'elle a dans la moienne diſtance de la terre au Soleil, laquelle on trouvera (par le Cor. 3. de la Prop. 40. Liv. 3.) & que tV ſoit perpendiculaire ſur la corde $T\tau$.

Dans la longitude moienne obſervée tB, ſoit pris un point quelconque B pour le lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique, & ſoit tirée enſuite vers le Soleil S la ligne BE qui ſoit à la fléche tV comme $SB \times St^2$ eſt au cube de l'hypothénuſe du triangle rectangle dont les côtés ſont BS & la tangente de la latitude de la cométe dans la ſeconde obſervation pour le rayon tB. Par le point E ſoit menée (par le Lemme 7. du Liv. 3.) la droite ACE dont les parties AE, EC terminées par les droites TA & τC ſoient l'une à l'autre comme les temps V & W : A & C ſeront, à peu près, les lieux de la cométe dans le plan de l'écliptique pour la premiere & la troiſiéme obſervation, pourvu que B, qui eſt ſuppoſé ſon lieu dans la ſeconde obſervation, ait été pris exactement.

Fig. 25.

Elevez la perpendiculaire Ii sur AC partagée en deux également au point I. Par le point B tirez, par pensée, Bi parallele à AC, tirez, mentalement, Si qui coupe AC en λ, & achevez le parallélograme $iI\lambda\mu$. Prenez $I\sigma$ égale à $3I\lambda$, & tirez, mentalement, par le Soleil S, $\sigma\xi$ égale à $3S\sigma + 3i\lambda$; & effaçant les lettres A, E, C, I, menez, par pensée, BE, du point B vers le point ξ, laquelle ligne soit à la premiere BE en raison doublée de la distance BS à la quantité $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$; & par le point E tirez de nouveau la droite AEC en suivant le même procédé qu'auparavant, c'est-à-dire, ensorte que ses parties AE, & EC soient l'une à l'autre, comme les temps écoulés entre les observations V & W; A & C seront les lieux de la cométe plus exactement.

Soient élevées AM, CN, IO perpendiculaires sur la ligne AC partagée en deux parties égales au point I. AM, CN sont les tangentes des latitudes dans la premiere & la troisiéme observation pour les rayons TA & τC. Soit tirée ensuite MN qui coupe la ligne IO en O, & soit fait le rectangle $iI\lambda\mu$ comme ci-devant; sur IA prolongée, soit prise ID égale à $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Ensuite soit prise, sur MN vers N, la ligne MP, laquelle soit à la droite X ci-devant trouvée, en raison sousdoublée de la moienne distance de la terre au Soleil (ou du demi diamétre du grand orbe) à la distance OD. Si le point P tombe sur le point N; les points A, B, C seront les trois lieux de la cométe par lesquels son orbe doit être décrit dans le plan de l'écliptique. Si le point P ne tombe pas sur le point N; il faut prendre sur la ligne AC, CG égale à NP, ensorte que les points G & P soient vers les mêmes parties de la droite NC.

Par la même méthode qu'on a trouvé les points E, A, C, G, en se servant du point B; on trouvera de nouveaux points e, a, c, g, & ϵ, α, κ, γ, en se servant d'autres points quelconques b & β. Ensuite, si par G, g, γ, on fait passer la circonférence d'un cercle $Gg\gamma$ qui coupe la ligne τC en Z: le point Z sera un lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Et si

Fig. 25.

on prend ſur AC, ac & $\alpha\varkappa$ les droites AF, af & $\alpha\varphi$ égales reſpectivement à CG, cg & $\varkappa\gamma$, & qu'on faſſe paſſer la circonférence d'un cercle $Ff\varphi$ par les points F, f, φ, & que cette circonférence coupe la ligne AT en X; le point X ſera un autre lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Enſuite élevant aux points X & Z les tangentes des latitudes de la cométe pour les rayons TX & TZ, on aura deux lieux de la cométe dans ſa propre orbite. Enfin, (par la Prop. 19. Liv. 1.) faiſant paſſer par ces deux lieux une parabole dont le foyer ſoit S, elle ſera la trajectoire de la cométe. *C. Q. F. T.*

La démonſtration de cette conſtruction ſuit des Lemmes précédens : car puiſque (par le Lemme 7.) la droite AC a été coupée en E, dans la raiſon des temps, comme l'éxige le Lemme 8. & que BE (par le Lemme 11.) eſt la partie de la ligne BS ou $B\xi$ dans le plan de l'écliptique, compriſe entre l'arc ABC & la corde AEC, & qu'enfin MP eſt (par le Cor. du Lemme 10.) la longueur de la corde de l'arc que la cométe doit parcourir dans ſa propre orbite entre la premiere & la troiſiéme obſervation, elle ſera par conſéquent égale à MN, pourvu que B ſoit le vrai lieu de la cométe ſous le plan de l'écliptique.

Au reſte, il ne faut pas prendre les points B, b & β à volonté, mais il faut les choiſir près l'un de l'autre. Si on connoît à peu près l'angle AQt ſous lequel la projection de l'orbe décrit dans le plan de l'écliptique coupe la ligne Bt; il faut mener dans cet angle l'occulte AC qui ſoit à $\frac{4}{3}T\tau$ en raiſon ſouſdoublée de SQ à St. Et tirant la droite SEB dont la partie EB égale la droite Vt, on déterminera le point B qu'il faut prendre pour le premier. Enſuite effaçant la ligne AC, & la tirant de nouveau ſelon la conſtruction précédente, & trouvant de plus la droite MP; on prendra le point b ſur tB, enſorte que (Y étant l'interſection de TA, τC) la diſtance Yb ſoit à la diſtance YB en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de SB à Sb & de la raiſon ſimple de MP à MN. De la même maniére, on trouvera le troiſiéme

ſiéme point β ſi on veut répéter l'opération une troiſiéme fois ; mais par cette méthode deux opérations ſeront plus que ſuffiſantes ; car ſi la diſtance Bb étoit très-petite, après que les points F, f & G, g ſeront trouvés, les droites Ff, Gg qu'on tirera, couperont AT & τC dans les points cherchés X & Z.

EXEMPLE.

Soit propoſée la cométe de 1680. Son mouvement calculé d'après les obſervations de *Flamſted*, & corrigé par *Halley* ſur les mêmes obſervations, eſt expoſé dans la table ſuivante.

	Temps apparent.	Temps vrai.	Longitude du Soleil.	Longitude de la Comète.	Latitude boréale de la Comète.
	h ′	h ′ ″	d ′ ″	d ′ ″	d ′ ″
1680. *Déc.* 12	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♒ 5. 8.12	21.42.13
24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.23	25.23. 5
26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24.13	27. 0.52
29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♓ 13.10.41	28. 9.58
30	8. 2	8.10.26	2.201. 9	17.38.20	28.11.53
1681. *Janv.* 5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29. 2	18.44. 4	24.11.56
10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Fev. 2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

Ajoutez à ces obſervations quelques-unes que j'ai faites moi-même.

	Temps de l'apparition.		Longitude de la Comête.			Latitude boréale de la Comête.		
	h	′	d	′	″	d	′	″
1681. *Février.* 25	8	30	♉ 26	18	35	12	46	46
27	8	15	27	4	30	12	36	12
Mars. 1	11	0	27	52	42	12	23	40
2	8	0	28	12	48	12	19	38
5	11	30	29	18	0	12	3	16
7	9	30	♊ 0	4	0	11	57	0
9	8	30	0	43	4	11	45	52

Ces obſervations ont été faites avec un téleſcope de ſept pieds & un micrométre dont les fils étoient placés dans le foyer du téleſcope : & c'eſt avec ces inſtrumens que nous avons déterminé les poſitions des fixes entre elles, & les poſitions de la comête par rapport aux fixes. Que *A* repréſente l'étoile de la quatriéme grandeur dans le talon gauche de Perſée (marquée *o* dans *Bayer*) *B* l'étoile ſuivante de la troiſiéme grandeur dans ſon pied gauche (marquée ζ dans *Bayer*) & *C* l'étoile de la ſixiéme grandeur dans le talon du même pied (marquée *n* dans *Bayer*) & *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ, d'autres étoiles plus petites du même pied : que *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X* ſoient les lieux de la comête dans les obſervations ci-deſſus décrites ; la diſtance *AB* étant de $80\frac{7}{12}$ parties, *AC* étoit de $52\frac{1}{4}$, *BC* en avoit $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$: & *HO* étoit à *HI* comme 7 à 6, & étant prolongée elle paſſoit entre les étoiles *D* & *E*, enſorte que la diſtance de l'étoile *D* à cette ligne étoit de $\frac{1}{6}$ *CD* : &

Fig. 26.

L M étoit à *L N* comme 1 à 9, & étant prolongée elle passoit par l'étoile *H*. Par là les positions des fixes entr'elles étoient déterminées.

Fig. 26.

Enfin *Pound* notre compatriote, observa de nouveau la position de ces fixes entr'elles, & il a donné la table suivante de leurs longitudes & de leurs latitudes.

Fixes.	*Longitudes.*				*Latitudes boréales.*		
		d	'	"	d	'	"
A	♉	26	41	50	12	8	36
B		28	40	23	11	17	54
C		27	58	30	12	40	25
E		26	27	17	12	52	7
F		28	28	37	11	52	22
G		26	56	8	12	4	58
H		27	11	45	12	2	1
I		27	25	2	11	53	11
K		27	42	7	11	53	26
L	♉	29	33	34	12	7	48
M		29	18	54	12	7	20
N		28	48	29	12	31	9
Z		29	44	48	11	57	13
α		29	52	3	11	55	48
β	♊	0	8	23	11	48	56
γ		0	40	10	11	55	18
δ		1	3	20	11	30	42

J'observai donc les positions de la cométe à ces étoiles de la maniére suivante.

Le Vendredy 25 *Février* v. st. à $8^h\frac{1}{2}$ après mid. la cométe étant en *p*, sa distance à l'étoile *E*, étoit moindre que $\frac{1}{13}$ *A E*, & plus grande que $\frac{1}{5}$ *A E*; ainsi elle étoit à peu près égale à $\frac{1}{14}$ *A E*; & l'angle *A p E* n'étoit presque pas obtus, mais approchoit beaucoup d'être droit; ensorte qu'en tirant du point *A* une perpendiculaire sur *p E*, la distance de la cométe à cette perpendiculaire étoit de $\frac{1}{5}$ *p E*.

La même nuit à $9^h\frac{1}{2}$, la cométe étant en *P*, sa distance à

R ij

l'étoile E étoit plus grande que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, & plus petite que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE, ainsi elle étoit à peu près égale à $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ ou $\frac{8}{39}$ AE. Et la cométe étoit éloignée de la perpendiculaire tirée de l'étoile A à la ligne PE de $\frac{4}{5}$ PE.

Fig. 16.

Le Dimanche 27 *Février* à 8 h $\frac{1}{4}$ aprés midi, la cométe étant en Q, sa distance à l'étoile O étoit égale à la distance des étoiles O & H, & la ligne QO, prolongée, passoit entre les étoiles K & B; je ne pus pas déterminer plus exactement la position de cette ligne à cause des nuages qui survinrent.

Le Mardy premier *Mars* à 11 h aprés midi, la cométe étant en R, elle étoit éxactement entre les étoiles K & C, & la partie CR de la ligne CRK étoit un peu plus grande que $\frac{1}{3}$ CK, & un peu plus petite que $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$, ainsi elle étoit égale à $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR$, ou à $\frac{16}{45}$ CK.

Le Mercredy 2 *Mars* à 8 h aprés midi, la cométe étant en S, sa distance à l'étoile C étoit à peu près de $\frac{4}{9}$ FC, la distance de l'étoile F à la droite CS, prolongée, étoit de $\frac{1}{24}$ FC; & la distance de l'étoile B à la même ligne étoit 5 fois plus grande que la distance de l'étoile F. De plus, la ligne NS prolongée passoit entre les étoiles H & I cinq ou six fois plus près de l'étoile H que de l'étoile I.

Le Samedy 5 *Mars* à 11 h $\frac{1}{2}$ aprés midi, la cométe étant en T, la ligne MT étoit égale à $\frac{1}{2}$ ML, & la ligne LT prolongée passoit entre B & F quatre ou cinq fois plus près de F que de B, en retranchant de BF, sa cinquiéme ou sa sixiéme partie vers F. Et MT prolongée passoit au-delà de l'espace BF du côté de l'étoile B, quatre fois plus prés de l'étoile B que de l'étoile F. M étoit une des plus petites étoiles qu'on pût à peine appercevoir par le télescope, & L une étoile un peu plus grande & presque de la huitiéme grandeur.

Le Lundy 7 *Mars* à 9 $^h \frac{1}{4}$ après midi, la cométe étant en V, la ligne $V\alpha$ prolongée passoit entre B & F, & elle retranchoit de BF vers F $\frac{1}{10}$ BF, elle étoit à la ligne $V\beta$ comme 5 à 4; & la distance de la cométe à la ligne $\alpha\beta$ étoit $\frac{1}{7}$ $V\beta$.

Fig. 26.

Le Mercredy 9 *Mars* à 8 $^h \frac{1}{2}$ après midi, la cométe étant en X, la droite γX étoit égale à $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & la perpendiculaire tirée de l'étoile δ à la ligne γX étoit de $\frac{1}{5}\gamma\delta$.

La même nuit à 12 heures, la cométe étant en Y, la ligne γY étoit égale à $\frac{1}{3}$ γ δ ou un peu plus petite, comme $\frac{5}{16}$ γ δ, & la perpendiculaire abbaissée de l'étoile δ à la ligne γY étoit égale à $\frac{1}{6}$ ou à $\frac{1}{7}\gamma$ δ environ. Mais la cométe pouvoit à peine être vue, parce qu'elle étoit très-près de l'horison, & on ne pouvoit pas déterminer son lieu avec autant de précision que dans les observations précédentes.

Par ces observations, par la construction des figures, & par les calculs, je déterminai les longitudes & les latitudes de la cométe, & *Pound* corrigea ses lieux sur les lieux corrigés des fixes, & j'ai donné ci-dessus ces lieux corrigés.

Je me servis d'un micrométre assez grossiérement construit, cependant les erreurs des longitudes & des latitudes (en tant qu'elles peuvent venir de mes observations) surpassent à peine une minute. Au reste, la cométe (selon mes observations) commença à la fin de son mouvement à s'éloigner considérablement vers le Nord du parallele qu'elle avoit décrit à la fin de *Février*.

Pour déterminer ensuite l'orbe de la cométe, je choisis trois des observations de *Flamsted* décrites ci-dessus, celles du 21 *Décembre*, du 5 & du 25 *Janvier*, & j'ai trouvé par ces observations, que St avoit 9842, 1 parties, que Vt en avoit 455, en supposant que le demi diamétre du grand orbe en eût 10000.

Dans la premiére opération prenant tB de 5657 parties, je trouvai SB de 9747, BE pour la premiére fois étoit de 412, $S\mu$ de 9503, & $i\lambda$ de 413. BE la seconde fois en avoit 421, OD 10186, X 8528, 4 MP 8450, MN 8475, & NP 25,

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 26.

d'où j'ai conclu la diſtance *tb* de 5640 pour la ſeconde opération. Et par cette opération j'ai trouvé enfin la diſtance *TX* de 4775, & la diſtance *τZ* de 11322. Par le moyen de ces diſtances j'ai trouvé, en déterminant l'orbe, le nœud deſcendant dans ♋ 1ᵈ 53′ & le nœud aſcendant dans ♑ 1ᵈ 53′. L'inclinaiſon du plan de cet orbe au plan de l'écliptique étoit de 61ᵈ 20′⅓; ſon ſommet, ou le périhélie de la cométe, étoit éloigné du nœud de 8ᵈ 38′, & il étoit dans ♐ 27ᵈ 43′, ayant une latitude auſtrale de 7ᵈ 34′; & ſon paramétre étoit de 236, 8 parties, & l'aire qu'elle décrivoit chaque jour autour du Soleil en avoit 93585, ſuppoſé que le quarré du demi diamétre du grand orbe fut de 100000000.

La cométe avançoit dans cet orbe ſelon l'ordre des ſignes, & le 8 *Décembre* à 0ʰ 4′. après midi elle étoit dans le ſommet de ſon orbite ou dans ſon périhélie, toutes ces déterminations ont été faites graphiquement avec une échelle de parties égales, & les cordes des angles ont été priſes d'après la table des ſinus naturels; & en faiſant une grande figure dans laquelle le demi diamétre du grand orbe (qu'on ſuppoſe avoir 10000 parties) étoit de 16 pouces anglais & un tiers.

Enfin, pour ſçavoir ſi la cométe parcouroit effectivement l'orbe ainſi trouvé, je déterminai par des opérations partie arithmétiques & partie graphiques les lieux de la cométe dans cet orbe pour le temps de quelques-unes des obſervations; comme on le verra dans la table ſuivante.

	Diſtances de la Cométe au Sol.	*Longitudes conclues.*	*Latitudes conclues.*	*Longitudes obſervées.*	*Latitudes obſervées.*	*Diff. des Longit.*	*Différence des Latitudes.*
		d ′	d ′	d ′	d ′	′	′
Déc. 12	2792	♑ 6.32	8.18½	♑ 6.31⅓	8.26	+1	− 7½
29	8403	♓ 13.13⅔	28. 0	♓ 13.11¾	28.10$\frac{1}{12}$	+2	−10$\frac{1}{12}$
Févr. 5	16669	♉ 17. 0	15.29⅔	♉ 16.59⅞	15.27⅖	+0	+ 2¼
Mars. 5	21737	29.19¾	12. 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3½	−1	+ ½

Halley a déterminé cette orbite depuis plus exactement par le calcul arithmétique qu'on ne le peut faire graphiquement ; & il a trouvé comme nous le lieu des nœuds dans ♋ $1^{d}\ 53'$ & ♑ $1^{d}\ 53'$, & l'inclinaiſon du plan de l'orbite au plan de l'écliptique de $61^{d}\ 20'\frac{1}{3}$. ainſi que le temps du périhélie de la cométe le 8 *Décembre* $0^{h}\ 4'$. Mais ayant meſuré la diſtance du périhélie au nœud aſcendant dans l'orbite de la cométe, il la trouva de $9^{d}\ 20'$. Le paramétre de la parabole étant de 2430 parties, la médiocre diſtance du Soleil à la terre en ayant 100000. Et employant ces élémens, il a déterminé de même par un calcul arithmétique éxact, les lieux de la cométe aux temps des obſervations, comme il ſuit.

Temps vrai.			*Diſtance de la Cométe au Soleil.*		*Longitudes comptées.*	*Latitudes comptées.*	*Erreurs en Longitudes.*	*Erreurs en Latitudes.*
Jours.		h			d ′ ″	d ′ ″	′ ″	′ ″
Déc.	12.	4.46	28028	♑	6.29.25	8.26. 0 Bor.	−3. 5	−2. 0
	21.	6.37	61076	♒	5. 6.30	21.43.20	−1.42	+1. 7
	24.	6.18	70008		18.48.20	25.22.40	−1. 3	−0.25
	26.	5.21	75576		28.22.45	27. 1.36	−1.28	+0.44
	29.	8. 3	84021	♓	13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
	30.	8.10	86661		17.40. 5	28.11.20	+1.45	−0.33
Janv.	5.	6. 1½	101440	♈	8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
	9.	7. 0	110959		18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
	10.	6. 6	113162		20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
	13.	7. 9	120000		26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
	25.	7.59	145370	♉	9.33.40	17.57.55	−1.20	+1.25
	30.	8.22	155303		13.17.41	16.42. 7	−2.10	−0.11
Févr.	2.	6.35	160951		15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
	5.	7. 4½	166686		16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
	25.	8.41	202570		26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mars.	5.	11.39	216205		29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Cette cométe avoit déja paru dès le mois de *Novembre* précédent, & elle fut obſervée à *Coburg* en *Saxe*, par M. *Gottfried Kirch*,

le 4, le 6, & le 11 du même mois v. ſt. & de ſes poſitions par rapport aux plus prochaines étoiles fixes, obſervées aſſez exactement, tantôt avec un téleſcope de deux pieds, & tantôt avec un de dix pieds (les lieux des étoiles fixes étant ceux que *Pound* avoit déterminés, & la différence en longitudes de *Coburg* & de *Londres*, étant de 11 degrés) *Halley* a déterminé les lieux de cette comète en cette maniére.

Le 3 *Novembre* à 17 ^{h} 2 ' du temps apparent à *Londres*, la comète étoit dans le 29 ^{d} 51' du Lion, & avoit 1 ^{d} 17' 45" de latitude boréale.

Le 5 *Novembre* à 15 ^{h} 58' la comète étoit dans le 3 ^{d} 23' de la Vierge ayant 1 ^{d} 6' de latitude boréale.

Le 10 *Novembre* à 16 ^{h} 31' la comète étoit également éloignée des étoiles du Lion marquées σ & τ dans *Bayer*; & cependant elle ne parvint jamais à la ligne qui les joint, mais elle s'en éloignoit peu.

Dans le catalogue des étoiles de *Flamſted*, l'étoile σ avoit alors pour longitude 14 ^{d} 15' ♍, & 1 ^{d} 41' à peu près de latitude boréale, & τ étoit dans le 17 ^{d} 3' $\frac{1}{2}$ ♍, & avoit 0 ^{d} 34' de latitude auſtrale, & le point milieu entre ces étoiles étoit le 15 ^{d} 39' $\frac{1}{4}$ ♍ avec 0 ^{d} 33' $\frac{1}{2}$ de latitude boréale.

Soit la diſtance de la comète à cette ligne de 10' ou 12' environ, la différence des longitudes de la comète & de ce point milieu ſera de 7' & celle des latitudes de 7' $\frac{1}{2}$ environ; partant, la comète étoit dans le 15 ^{d} 32' ♍ avec une latitude boréale de 26' environ.

La premiere obſervation de la poſition de la comète par rapport à quelques petites étoiles fixes, fut faite aſſez éxactement ainſi que la ſeconde. Dans la troiſiéme qui fut moins éxacte, l'erreur pût être de 6 à 7 minutes, ou de très-peu de choſe plus grande, & la longitude de la comète, dans la premiere obſervation qui fut la plus éxacte de toutes, étant calculée dans l'orbe



l'orbe parabolique dont on a parlé, étoit de ☊ $29^{d}\ 30'\ 22''$, ſa latitude boréale de $1^{d}\ 25'\ 7''$, & ſa diſtance au Soleil de 115546 parties.

De plus, *Halley* ayant remarqué qu'il avoit paru quatre grandes cométes à 575 ans d'intervalle, ſçavoir, une au mois de Septembre après la mort de Jules Céſar, une l'an 531 de Jeſus-Chriſt ſous le conſulat de Lampadius & d'Oreſte, une l'an 1106 de Jeſus-Chriſt au mois de Février, & enfin une ſur la fin de l'année 1680. & que toutes quatre avoient une queue très-longue & très-brillante, (excepté que la queue de celle qui parut à la mort de Céſar paroiſſoit moins grande à cauſe de la poſition de la terre) il chercha l'orbe elliptique, dont le grand axe auroit 1382957 parties (la moyenne diſtance du Soleil à la terre en ayant 10000) dans lequel une cométe pût faire ſa révolution en 575 ans; & plaçant ſon nœud aſcendant dans ♋ $2^{d}\ 2'$. Et faiſant l'inclinaiſon du plan de ſon orbite au plan de l'écliptique de $61^{d}\ 6'\ 48''$; le périhélie de la cométe dans ce plan ſe trouvoit ♐ $22^{d}\ 44'\ 25''$. Et le temps corrigé du périhélie le 7 Décembre $23^{h}\ 9'$; la diſtance du périhélie au nœud aſcendant dans le plan de l'écliptique de $9^{d}\ 17'\ 35''$; & l'axe conjugué de 18481, 2 parties, il calcula le mouvement de la cométe dans cet orbe elliptique, & ſes lieux, tant ceux qui ſont déduits des obſervations, que ceux comptés dans cet orbe, ſe trouvent dans la table ſuivante.

Temps vrai.	*Longitudes observées.*	*Lat. boréales observ.*	*Longitudes comptées.*	*Latitudes comptées.*	*Erreurs en Longitudes.*	*Erreurs en Latitudes.*
d h '	d ' "	d ' "	d ' "	d ' "	' "	' "
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Déc. 12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23 35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.2	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Janv. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Févr. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mars. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Les observations de cette cométe, depuis le commencement de son apparition jusqu'à la fin, s'accordent autant avec son mouvement dans l'orbe ci-dessus décrit, que les mouvemens des planettes ont coutume de s'accorder avec leurs théories, ce qui prouve que ce fut la même cométe qui parut pendant tout ce temps & que son orbite a été exactement déterminée.

Nous avons obmis dans la table précédente les observations faites les 16, 18, 20 & 23 *Novembre* parce qu'elles étoient moins éxactes.

Pontheus & ses compagnons observerent le 17 *Novembre* v. st. à 6 heures du matin à Rome (ce qui est à 5 h 10' à Londres) la cométe, par des fils appliqués aux fixes & la trouverent en ♎

8 d 30′ ayant 0 d 40′ de latitude auſtrale. On trouve leurs obſervations dans le traité que *Pontheus* a publié de cette cométe, *Cellius* qui y étoit préſent & qui envoya ſes obſervations à M. *Caſſini*, vit à la même heure la cométe dans ♎ 8 d 30′, ayant 0 d 30′ de latitude auſtrale.

Galletius obſerva la cométe à *Avignon* à l'heure qui répond à 5 h 42′ du matin à *Londres* & il la vit dans ♎ 8 d ſans latitude, & par la théorie elle devoit être dans ♎ 8 d 16′ 45″ avec 0 d 53′ 7″ de latitude auſtrale.

Le 18 *Novembre* à 6 h 30′ du matin à Rome (qui répondent à 5 h 40′ du matin à *Londres.*) *Pontheus* vit la cométe dans ♎ 13 d 30′ ayant 1 d 20′ de latitude auſtrale, *Cellius* l'obſerva dans ♎ 13 d 30′ ayant 1 d 00′ de latitude auſtrale, *Galletius* à 5 h 30′ du matin à *Avignon* obſerva la cométe dans ♎ 13 d 00′ ayant 1 d 00′ de latitude auſtrale, & le R. P. *Ango* à *la Fléche* en *France* obſerva la cométe à 5 h du matin (qui répondent à 5 h 9′ à *Londres*) dans le milieu de deux petites étoiles, dont l'une eſt l'étoile du milieu des trois qui ſont en ligne droite dans la main auſtrale de la Vierge, marquée ψ dans *Bayer*, & l'autre eſt la derniere de ſon aîle laquelle eſt marquée θ dans *Bayer*. Donc alors la cométe étoit dans ♎ 12 d 46′ ayant une latitude auſtrale de 50′. Le même jour, à *Boſton* dans la *Nouvelle Angleterre* à 42 d ½ de latitude à 5 h du matin (ce qui répond à 9 h 44′ du matin à *Londres*) la cométe fut vûe près ♎ 14 d ayant une latitude auſtrale de 1 d 30′, comme je l'ai appris de l'illuſtre *Halley*.

Le 19 *Novembre* à 4 h ½ du matin à *Cambridge*, un jeune homme obſerva la cométe diſtante d'environ 2 d de l'épi de la Vierge vers le Nord-Oueſt; or cet épi étoit dans ♎ 19 d 23′ 47″ ayant 2 d 1′ 59″ de latitude auſtrale.

Le même jour à 5 h du matin à *Boſton* dans la *Nouvelle Angleterre*, la cométe étoit éloignée de 1 d de l'épi de la Vierge, & la différence des latitudes étoit de 40′.

Le même jour dans l'Iſle de la *Jamaïque*, la cométe étoit éloignée de l'épi d'environ un degré.

Le même jour le Docteur *Arthur-ſtor*, au fleuve du *Patuxent* proche *Hunt-ing Creek* dans le *Maryland* vers les confins de *la Virginie* à 38 ^{d} ½ de latitude, vit à 5 ^{h} du matin (qui répondent à 10 ^{h} à *Londres*) la cométe au-deſſus de l'épi de la Vierge, & touchant preſque à cette étoile, y ayant environ ¾ de degrés entre eux, & faiſant uſage de toutes ces obſervations, je conclus, qu'à 9 ^{h} 44′ à *Londres*, la cométe étoit dans ♎ 18 ^{d} 50′, ayant 1 ^{d} 25′ de latitude auſtrale environ; & par la théorie elle devoit être dans ♎ 18 ^{d} 52′ 15″ avec 1 ^{d} 26′ 54″ de latitude auſtrale.

Le 20 *Novembre*, le Docteur *Montenarus* profeſſeur d'aſtronomie à *Padoue*, vit à 6 ^{h} du matin à Veniſe (qui répondent à 5 ^{h} 10′ à *Londres*) la cométe dans le 23 ^{d} de la balance ayant 1 ^{d} 30′ de latitude auſtrale.

Le même jour à *Boſton*, la cométe étoit diſtante de l'épi de la Vierge de 4 ^{d} de longitude vers l'Orient, & par conſéquent elle étoit dans ♎ 23 ^{d} 24′ environ.

Le 21 *Novembre*, *Pontheus* & ſes compagnons, à 7 ^{h} ¼ du matin, obſerverent la cométe dans ♎ 27 ^{d} 50′ ayant 1 ^{d} 16′ de latitude auſtrale, *Cellius* l'obſerva dans ♎ 28 ^{d}. Le P. *Ango* à 7 ^{h} du matin, l'obſerva dans ♎ 27 ^{d} 45′ & *Montenarus* dans le 27 ^{d} 51′ de ce même ſigne.

Le même jour dans l'Iſle de *la Jamaïque*, la cométe fut vûe auprès du commencement du ſcorpion, & elle avoit à peu près la même latitude que l'épi de la Vierge, c'eſt-à-dire, 2 ^{d} 2′.

Le même jour à *Balſora* dans l'*Inde Orientale*, à 5 ^{h} du matin (qui répondent à 11 ^{h} 20′ de la nuit précédente à *Londres*) on prit la diſtance de la cométe à l'épi de la Vierge, & elle ſe trouva de 7 ^{d} 35′ vers l'Orient. Et elle étoit poſée dans la ligne droite qui joint l'épi & la balance, & ainſi elle étoit dans ♎ 26 ^{d} 58′, & elle avoit 1 ^{d} 11′ environ de latitude auſtrale; & après 5 ^{h} 40′ (qui répondent environ à 5 ^{h} du matin à Londres) elle étoit dans ♎ 28 ^{d} 12′, ayant une latitude auſtrale de 1 ^{d} 16′ & par la théo-

rie elle devroit être dans ♎ 28^{d} 10′ 36″ avec 1^{d} 53′ 35″ de latitude australe.

Le 21 *Novembre* la comète fut vûe par *Montenarus* dans ♏ 2^{d} 33′, & à *Boston* dans la *Nouvelle Angleterre* elle parut dans ♏ 3^{d} environ, ayant presque la même latitude qu'auparavant, c'est-à-dire, 1^{d} 30′.

Le même jour à *Balsora* à 5^{h} du matin, la comète fut observée dans ♏ 1^{d} 50′, donc à 5^{h} du matin à *Londres* la comète étoit dans ♏ 3^{d} 5′ environ.

Le même jour à 6$^{h}\frac{1}{2}$ du matin à *Londres*, *Hook* vit la comète dans ♏ 3^{d} 30′ environ, c'est-à-dire, dans la ligne droite qui passe par l'épi de la Vierge & le cœur du Lion, non pas exactement à la vérité, mais s'éloignant un peu de cette ligne vers le Nord: *Montenarus* remarqua de même que la ligne menée de la comète par l'épi passoit ce jour-là & les suivans par le côté austral du cœur du Lion, y ayant seulement un très-petit intervalle entre le cœur du Lion & cette ligne. La ligne droite qui passe par l'épi de la Vierge & par le cœur du Lion, coupe l'écliptique dans ♍ 3^{d} 46′ sous un angle de 2^{d} 51′, & si la comète avoit été placée dans cette ligne dans ♏ 3^{d} sa latitude auroit été de 2^{d} 26′.

Mais comme, selon les observations de *Hook* & de *Montenarus* qui s'accordent, la comète s'éloignoit un peu de cette ligne vers le Nord, sa latitude étoit un peu plus petite.

Le 20 *Novembre*, selon l'observation de *Montenarus*, sa latitude étoit environ égale à la latitude de l'épi de la Vierge, & par conséquent elle étoit de 1^{d} 30′ environ, & selon *Hook*, *Montenarus* & le P. *Ango*, qui s'accordent, elle augmentoit toujours, elle devoit donc être sensiblement plus grande que 1^{d} 30′. Or entre ces deux limites trouvées de 2^{d} 26′, & 1^{d} 30′, la grandeur moyenne de sa latitude étoit d'environ 1^{d} 58′.

La queue de la comète, selon *Hook* & *Montenarus* étoit dirigée à l'épi de la Vierge en déclinant cependant un peu vers le Midi selon *Hook*, & vers le Nord selon *Montenarus*; ainsi cette déclinaison étoit à peine sensible, & la queue étoit à peu près

parallele à l'équateur, & elle se détournoit un peu de l'opposition du Soleil vers le Nord.

Le 23 *Novembre* v. st. à 5 heures du matin à *Norberg* (ce qui fait 4 heures $\frac{1}{2}$ à *Londres*) le Docteur *Zimmerman* vit la cométe dans ♏ $8^d\ 8'$ ayant $2^d\ 31'$ de latitude australe, ses distances ayant été prises par rapport aux étoiles fixes.

Le 24 *Novembre* avant le lever du Soleil, la cométe fut vue par *Montenarus* dans ♏ $12^d\ 52'$ au côté boréal de la ligne droite tirée par le cœur du Lion & par l'épi de la Vierge, ainsi elle avoit un peu moins de $2^d\ 38'$ de latitude, cette latitude, comme nous l'avons dit, augmentoit continuellement, selon les observations de *Hook*, *Montenarus* & *Ango*; elle étoit donc alors un peu plus que de $1^d\ 58'$ & sa moyenne grandeur peut être fixée à $2^d\ 18'$ sans erreur sensible.

Pontheus & *Galletius* ont prétendu déterminer cette latitude, *Cellius* & celui qui l'a observée dans la *Nouvelle Angleterre* l'ont trouvée à peu près de même grandeur, c'est-à-dire, d'un degré ou d'un degré & demi.

Les observations les plus grossiéres sont celles de *Pontheus* & de *Cellius*, sur-tout celles qu'ils ont faites par les azimuths & les hauteurs, ainsi que l'ont été celles de *Galletius*.

Les meilleures sont celles où l'on employe les positions de la cométe par rapport aux fixes, comme *Montenarus*, *Hook* & *Ango* ont fait dans les leurs, ainsi que l'observateur de la *Nouvelle Angleterre* dans les siennes, & quelquefois *Pontheus* & *Cellius* dans les leurs.

Le même jour à 5 heures du matin à *Balsora* la cométe fut observée dans ♏ $11^d\ 45'$, & par conséquent à 5^h du matin à *Londres* elle étoit dans ♏ 13^d environ. Et par la théorie elle devoit être dans ♏ $13^d\ 22'\ 42''$.

Le 25 *Novembre* avant le lever du Soleil, *Montenarus* observa la cométe dans ♏ $17^d\ \frac{3}{4}$ environ, & *Cellius* observa, dans le même temps, qu'elle étoit dans la ligne droite tirée de l'étoile luisante de

la cuiffe gauche de la Vierge & le baffin auftral de la Balance, & cette ligne coupe le chemin de la cométe dans ♏ 18 d 36′, & par la théorie elle devoit être dans ♏ 18 d ½ environ.

Ces obfervations s'accordent donc autant avec la théorie, qu'elles s'accordent entr'elles, & cet accord prouve que ce fut une feule & même cométe qui fut vue depuis le 4 *Novembre* jufqu'au 9 de *Mars*, la trajectoire de cette cométe coupa deux fois le plan de l'écliptique, ainfi elle ne fut point rectiligne. Et elle ne coupa point l'écliptique dans les parties oppofées du ciel, mais à la fin de la Vierge, & au commencement du capricorne à 98 degrés environ d'intervalle; ainfi l'orbite de cette cométe s'éloignoit beaucoup d'être un grand cercle, car au mois de *Novembre* fon cours s'éloignoit à peine de l'écliptique de trois degrés vers le Sud, & enfuite, au mois de *Décembre* elle s'éloignoit de l'écliptique vers le Septentrion de 29 d, & ces deux parties de fon orbite dans l'une defquelles elle s'approchoit du Soleil, & s'en éloignoit dans l'autre, paroiffoient diftantes l'une de l'autre d'un angle de plus de 30 d comme l'obferva *Montenarus.*

Cette cométe parcourut 9 fignes, depuis le dernier degré du Lion jufqu'au commencement des Gémeaux, outre le figne du Lion qu'elle avoit parcouru avant qu'elle commençat à être vifible; & il n'y a aucune autre théorie qui donne aux cométes un mouvement régulier dans une fi grande portion du ciel.

Son mouvement fut fort inégal, car vers le 20 *Novembre* elle parcourut environ 5 degrés par jour; enfuite fon mouvement s'étant ralenti, entre le 26 *Novembre* & le 12 Décembre, c'eft-à-dire, dans un efpace de 15 jours & demi, elle ne parcourut qu'environ 40 degrés, enfuite fon mouvement étant de nouveau accéléré, elle parcouroit environ 5 d par jour avant que fon mouvement recommençat à être retardé. Or la théorie qui répond exactement à un mouvement fi inégal dans la plus grande partie du ciel, qui dépend des mémes loix qui dirigent le cours des planettes, & qui s'accorde fi bien avec les obferva-

tions astronomiques les plus exactes, ne peut manquer d'être vraie.

La trajectoire que la comète décrivit, & la queue réelle qu'elle projetta dans chacun de ses lieux sont représentés, pour le plan de la trajectoire même, dans la figure 27. dans laquelle *A B C* représente la trajectoire de la comète, *D* le Soleil, *D E* l'axe de la trajectoire, *D F* la ligne des nœuds, *G H* l'intersection de la sphère du grand orbe avec le plan de la trajectoire, *I* le lieu de la comète le 4 *Novembre* de l'année 1680. *K* son lieu le 11 *Novembre*, *L* son lieu le 19 *Novembre*, *M* son lieu le 12 *Décembre*, *N* son lieu le 21 *Décembre*, *O* son lieu le 29 *Décembre*, *P* son lieu le 5 *Janvier* suivant, *Q* son lieu le 25 *Janvier*, *R* son lieu le 5 *Février*, *S* son lieu le 25 *Février*, *T* son lieu le 5 *Mars*, & *V* son lieu le 9 *Mars*. J'ai employé les observations suivantes pour déterminer sa queue.

Fig. 27.

Le 4 & le 6 *Novembre* sa queue ne parut point, le 11 *Novembre* sa queue commençoit déja à paroître, mais par une lunette de 10 pieds elle ne paroissoit pas avoir plus d'un demi degré de long, le 17 *Novembre* sa queue parut à *Pontheus* avoir plus de 15 degrés de long, le 18 *Novembre* elle étoit longue de 30^d, & dans la *Nouvelle Angleterre* on la voyoit directement opposée au Soleil, & elle s'étendoit jusqu'à l'étoile de *Mars*, qui étoit alors dans ♍ $9^d\ 54'$.

Le 19 *Novembre* dans le *Maryland* la queue parut longue de 15^d ou 20^d, le 10 Décembre la queue (selon l'observation de *Flamsteed*) passoit par le milieu de la distance entre la queue du serpent d'*Ophiulchus* & l'étoile δ dans l'aîle australe de l'aigle, & elle finissoit vers les étoiles *A*, ω, *b* dans les tables de *Bayer*, son extrémité étoit donc dans ♑ $19^d\ \frac{1}{2}$ avec une latitude boréale de $34^d\ \frac{1}{4}$ environ.

Le 11 *Décembre* la queue s'élevoit jusqu'aux étoiles de la tête de la flèche (marquées α, β, dans *Bayer*) & elle finissoit dans ♑ $26^d\ 43'$ avec une latitude boréale de $38^d\ 34'$.

Le

Le 11 *Décembre* la queue passoit par le milieu de la fléche, & elle ne s'étendoit pas beaucoup au-delà, car elle finissoit dans ♒ 4^d avec une latitude boréale de 42^d $\frac{1}{2}$ environ.

Ce qu'on vient de dire doit s'entendre des parties de la queue les plus lumineuses. *Pontheus* qui observoit à *Rome* le 12 *Décembre* à 5^h 40′ sous un ciel peut-être plus serein, & qui pouvoit distinguer les parties plus foibles de la lumiére, trouva que sa queue s'étendoit à 10^d par-dessus le croupion du signe ; & son bord finissoit à 45′ de cette étoile vers le Nord-Ouest, sa queue avoit ces jours-là 3^d de largeur vers son extrémité supérieure, & par conséquent son milieu étoit distant de cette étoile de 2^d 15′ vers le Midi, son extrémité supérieure étoit dans ♓ 22^d ayant 61^d de latitude boréale, & par conséquent cette queue avoit environ 70^d de longueur.

Le 21 *Décembre* elle s'élevoit presque jusqu'à la chaise de *Cassiopée*, étant également éloignée de β & de *Shedir*, & sa distance à chacune de ces deux étoiles étoit égale à la distance qui est entr'elles, ainsi elle finissoit à ♈ 24^d ayant une latitude de 47^d $\frac{1}{2}$.

Le 29 *Décembre* la queue touchoit l'étoile *Scheat* qui étoit située à gauche, elle remplissoit exactement l'intervalle des 2 étoiles du pied boréal d'*Andromède*, & sa longueur étoit de 54^d, ainsi elle finissoit dans ♉ 19^d & sa latitude étoit de 35^d.

Le 5 *Janvier* la queue touchoit l'étoile π du côté droit de la poitrine d'*Andromède*, & l'étoile μ du côté gauche de sa ceinture, (selon nos observations) elle étoit longue de 40^d : elle étoit courbe, & son côté convéxe étoit tourné vers le Midi ; & elle faisoit, près de la tête de la comète, un angle de 4^d avec le cercle qui passoit par le Soleil & par la tête de la comète, mais près de l'autre bord elle étoit inclinée à ce cercle sous un angle de 10^d ou de 11^d & la corde de la queue faisoit avec ce cercle un angle de 8^d.

Le 13 *Janvier* la lumiére de la queue étoit encore assez sensible entre *Alamek* & *Algol*, & elle finissoit par une lumiére assez

foible vers l'étoile κ du côté de *Persée*, la distance du terme de la queue au cercle qui joignoit la cométe & le Soleil étoit de $3^d\ 50'$ & l'inclinaison de la corde de la queue à ce cercle étoit de $8^d\frac{1}{2}$.

Le 25 & le 26 *Janvier* la queue avoit une lumiere assez foible à la longueur de 6 ou 7 dégrés; & tant cette nuit que la suivante, le temps étant fort serein, elle s'étendoit à 12 dégrés & un peu plus, par une lumiere très-foible & à peine sensible. Son axe étoit dirigé exactement vers la claire de l'épaule orientale du cocher, ainsi elle déclinoit de l'opposition du Soleil vers le Nord sous un angle de 10^d.

Enfin le 10 *Février*, je vis avec une lunette la queue longue de 2^d, car la lumiére très-foible dont j'ai parlé, ne pouvoit pas s'appercevoir à travers les verres.

Ponthæus marque cependant qu'il vit la queue longue de 12^d le 7 *Février*, le 25 *Février* & les jours suivans la cométe n'avoit plus de queue.

En examinant l'orbe ci-dessus décrit, & en faisant attention aux autres Phénoménes de cette cométe, il sera bien difficile de ne pas conclure que les cométes sont des corps solides, compactes, fixes & durables, de même que les planettes; car si elles n'étoient autre chose que des vapeurs & des exhalaisons de la terre, du Soleil & des planettes, cette cométe auroit dû se dissiper dans l'instant dans son passage près du Soleil; car la chaleur du Soleil est comme la densité de ses rayons, c'est-à-dire, réciproquement comme le quarré de la distance des lieux au Soleil; ainsi, comme la distance de la cométe au centre du Soleil le 8 *Décembre*, qu'elle étoit dans son périhélie, étoit à la distance de la terre au centre du Soleil, comme 6 à 1000 environ, la chaleur du Soleil dans la cométe étoit alors à la chaleur du Soleil sur la terre en Eté, comme 1000000 à 36, ou comme 28000 à 1. Mais la chaleur de l'eau bouillante est presque triple de la chaleur que la terre reçoit en Eté des rayons du Soleil,

comme j'en ai fait l'expérience ; & la chaleur du fer ardent eſt trois ou quatre fois plus grande que celle de l'eau bouillante, (ſi je ne me trompe.) Donc la chaleur que la terre ſéche de la cométe dut éprouver par les rayons du Soleil dans ſon périhélie, étoit preſque 2000 fois plus grande que celle du fer ardent ; & par une telle chaleur, les vapeurs, les exhalaiſons & toute la matiére volatile dut être conſumée & diſſipée en un inſtant.

La cométe éprouva donc une chaleur immenſe des rayons du Soleil dans ſon périhélie, & elle a pû conſerver très-long temps cette chaleur ; car un globe de fer rouge d'un pouce de diamétre expoſé à l'air pendant une heure, perd à peine toute ſa chaleur. Et un globe d'un plus grand diamétre conſerveroit la ſienne plus longtemps en raiſon de ſon diamétre, parce que ſa ſuperficie (qui eſt la meſure du réfroidiſſement par le contact de l'air ambiant) eſt moindre dans cette raiſon eu égard à la quantité de matiére chaude qu'elle renferme. Ainſi un globe de fer rouge égal à la terre, c'eſt-à-dire, dont le diamétre ſeroit environ de 40000000 de pieds, ne ſe réfroidiroit qu'en 40000000 de jours, & par conſéquent à peine ſeroit-il réfroidi en 50000 ans. Je ſoupçonne cependant, que par des cauſes cachées, la durée de la chaleur doit augmenter dans une moindre raiſon que celle du diamétre : & je déſirerois bien en trouver la véritable raiſon par l'expérience.

De plus il faut remarquer que la cométe au mois de *Décembre*, où elle étoit encore toute imprégnée des rayons du Soleil, avoit une queue beaucoup plus grande & plus brillante qu'au mois de *Novembre* précédent, où elle n'avoit pas encore atteint ſon périhélie. Et en général, toutes les cométes ont les queues les plus grandes & les plus brillantes auſſitôt après leur paſſage par la region du Soleil. La chaleur de la cométe contribue donc à la grandeur de ſa queue, & de-là je crois qu'on doit conclure que cette queue n'eſt autre choſe qu'une vapeur très-légere que la tête ou le noyau de la cométe exhale à cauſe de ſa chaleur.

Au reste, il y a trois opinions sur les queues des comètes, celle de ceux qui croyent que ces queues ne sont autre chose que l'éclat du Soleil qu'on découvre à travers la tête transparente des comètes; celle de ceux qui prétendent que ces queues sont causées par la réfraction de la lumière en venant de la tête des comètes à la terre, & enfin celle de ceux qui supposent que ces queues sont une espèce de vapeur ou de nuage qui s'élève de la tête de la comète, & qui se répand sans cesse dans les régions opposées au Soleil.

La premiere opinion ne peut être soutenue que par ceux qui n'ont aucune teinture de l'optique, car la lumière du Soleil ne se voit point dans une chambre obscure, si ce n'est en tant qu'elle est réfléchie par les petites particules de poussière & par les vapeurs qui voltigent toujours dans l'air : ainsi dans un air chargé de vapeurs plus grossieres, elle est plus brillante, & frappe plus fortement les yeux; & plus l'air est rare, & moins il se réfléchit de lumière, ainsi dans les cieux où il n'y a aucune matière réfléchissante, il ne peut revenir de lumière à nos yeux : car la lumière ne se voit pas par elle-même, mais seulement lorsqu'elle est réfléchie vers nos yeux. Il faut donc que dans les régions où l'on voit les queues des comètes, il y ait une matiere qui réfléchisse la lumière, sans quoi tout le ciel où elles sont étant rempli des rayons du Soleil, il nous paroitroit également brillant par-tout.

La seconde opinion est sujette à bien des difficultés, car jamais il ne paroît de couleurs dans ces queues; or les couleurs ont cependant coutume d'être les compagnes inséparables de la réfraction : la lumière des fixes & des planettes qui nous est transmise pure & sans se colorer, est une preuve que les espaces célestes, que cette lumière traverse, ne contiennent point de milieu réfringent. Car ce qu'on rapporte que les Egyptiens ont vû quelquefois des fixes comme des comètes, doit sans doute son origine à quelque réfraction fortuite des nuées. Et la radia-

tion & la ſcintillation des fixes doit être attribuée aux réfractions des humeurs de nos yeux & à celles de l'air, qui a toujours un petit mouvement de trémulation, ce qui ſe prouve parce que cette ſcintillation ceſſe lorſqu'on regarde les étoiles à travers un téleſcope : car la trémulation de l'air & des vapeurs qui y ſont contenues eſt cauſe que les rayons ſont détournés facilement & par ſecouſſes de la prunelle, qui eſt très-étroite, mais il n'en eſt pas de même de l'ouverture beaucoup plus grande du verre objectif, voilà pourquoi la ſcintillation que nous éprouvons, lorſque nous regardons les étoiles avec nos yeux ſeulement, ceſſe lorſque nous les regardons à travers un téleſcope ; & cette ceſſation prouve que la lumiere eſt tranſmiſe dans les eſpaces céleſtes ſans réfraction ſenſible. Et qu'on ne diſe pas qu'on ne voit pas toujours les queues des cométes, parce que leur lumiére n'eſt pas aſſez forte, & qu'alors les rayons ſecondaires n'ont pas aſſez de force pour remuer nos yeux, & que c'eſt par cette raiſon que nous ne voyons pas de queues aux fixes : car la lumiére des fixes peut être augmentée plus de cent fois par le moyen des téleſcopes, & cependant on ne leur voit pas de queues. Les planettes donnent beaucoup plus de lumiére que les étoiles & cependant on ne leur voit point de queues, & ſouvent les cométes ont de très-grandes queues quoique la lumiere de leur tête ſoit très-foible, & très-ſourde.

La tête de la cométe de 1680. par exemple, avoit au mois de *Décembre* une lumiere qui égaloit à peine celle des étoiles de la ſeconde grandeur, & ſa queue répandoit une lumiére ſenſible dans un eſpace de 40. 50. 60. & 70 dégrés & plus : enſuite le 27 & le 28 *Janvier* ſa tête paroiſſoit ſeulement comme une étoile de la ſeptiéme grandeur, & ſa queue donnoit une lumiére, qui à la vérité étoit foible, mais qui étoit cependant aſſez ſenſible l'eſpace de 6 à 7 dégrés, & elle donnoit juſqu'à 12 dégrés & un peu plus une lumiére très-obſcure & qui ſe diſtinguoit difficilement, comme on l'a dit ci-deſſus.

Mais le 9 & le 10 *Février* que l'on cessa entiérement de voir la tête de la cométe à la vûe simple, je vis par le télescope la queue longue de deux dégrés : de plus, si la queue étoit l'effet de la réfraction de la matiére céleste, & qu'en vertu de la forme des cieux, elle se détournât de l'opposition du Soleil, cette défléxion devroit toujours se faire du même côté, & dans les mêmes régions du ciel ; mais cependant la cométe de 1680. le 28. *Décembre* à 8 $^{h}\frac{1}{2}$ après-midi à *Londres*, étoit dans le 8 ^{d} 41$'$ des poissons, & elle avoit 28 ^{d} 6$'$ de latitude boréale, le Soleil étant dans le 18 ^{d} 26$'$ du ♑. Et la cométe de l'année 1577. étoit le 29 *Décembre* dans le 8 ^{d} 41$'$ des ♓ avec une latitude boréale de 28 ^{d} 40$'$. Le Soleil étant aussi dans le 18 ^{d} 26$'$ environ du ♑. Dans l'un & l'autre cas la terre étoit dans le même lieu, & la cométe paroissoit dans la même partie du ciel ; cependant dans le premier cas la queue de la cométe déclinoit (selon mes observations & celles de plusieurs autres) d'un angle de 4 $^{d}\frac{1}{2}$ de l'opposition du Soléil vers le Nord ; & dans le dernier (selon les observations de *Tycho*) la déclinaison étoit de 21 ^{d} vers le Midi. Ainsi ne pouvant pas rapporter les queues à la réfraction des cieux, il reste à examiner si ces queues ne sont point produites par quelque matiére qui réfléchit la lumiére.

Les loix que les queues observent prouvent qu'elles viennent de la tête des cométes, & qu'elles montent dans les régions opposées au Soleil ; car lorsqu'elles sont dans les plans des orbes des cométes qui passent par le Soleil, elles se détournent toujours de l'opposition du Soleil vers les parties que leurs têtes abandonnent en avançant dans ces orbes. Ce qui fait qu'elles paroissent dans les parties directement opposées au Soleil à un spectateur placé dans ce plan ; mais à mesure que le spectateur s'éloigne de ce plan, leur déviation se fait sentir peu à peu, & elle devient de jour en jour plus grande : & cette déviation, toutes choses égales, est d'autant plus petite, que la queue est plus oblique à l'orbe de la cométe, c'est-à-dire, que la tête de la

cométe approche le plus du Soleil; ſur-tout ſi l'angle de la deviation eſt vu près de la tête de la cométe : de plus, les queues qui n'ont point de déviation paroiſſent droites, & celles qui ont une déviation paroiſſent courbes, & leur courbure paroît d'autant plus grande, que leur déviation eſt plus grande, & qu'elle eſt plus ſenſible, toutes choſes égales, à meſure que la queue eſt plus longue, car dans les queues fort courtes la courbure eſt à peine ſenſible.

Plus l'angle de la déviation eſt petit près de la tête de la cométe, & plus il eſt grand vers l'autre extrémité de la queue, & par conſéquent le côté convéxe de la queue eſt tourné alors vers les parties dont elle s'écarte par ſa déviation, leſquelles ſont dans la ligne droite indéfinie tirée du Soleil par la tête de la cométe. Et enfin, les queues les plus longues, les plus larges, & qui brillent de la lumiére la plus vive, ſont un peu plus brillantes par leur côté convéxe, & terminées plus exactement que par leur côté concave.

Les Phénoménes de la queue des cométes dépendent donc du mouvement de leur tête & non de la région du ciel dans laquelle on apperçoit leur tête; & par conſéquent elles ne ſont point l'effet de la réfraction des cieux, mais elles ſont formées de la matiére qui s'exhale de la tête des cométes. Et de même que dans notre air la fumée d'un corps enflammé quelconque s'éléve en-haut & monte perpendiculairement, ſi ce corps eſt en repos, ou obliquement, s'il ſe meut latéralement; ainſi dans les cieux,où tous les corps céleſtes gravitent vers le Soleil, les vapeurs & la fumée doivent monter par rapport au Soleil (comme on l'a déja dit) & s'élever en haut & en ligne droite, ſi le corps qui fume eſt en repos; ou obliquement ſi ce corps, en avançant, abandonne ſans ceſſe les lieux d'où les parties ſupérieures de la vapeur ont commencé à monter. Et cette obliquité eſt moindre lorſque les vapeurs montent avec plus de vîteſſe : comme dans le voiſinage du Soleil, & près du corps dont la fumée s'exhale; cette différente obliquité fait que la colonne compoſée de cette vapeur paroît

courbe : & comme la vapeur de la colonne du côté vers lequel se fait le mouvement de la cométe est un peu plus nouvellement exhalée, elle doit être aussi un peu plus épaisse dans cet endroit, & y réfléchir par conséquent une lumiére plus abondante, & la queue y doit être terminée plus exactement. Je n'ajoute rien ici sur les agitations subites & sans loi de ces queues, ni sur l'irrégularité de leurs figures dont quelques-uns ont donné la description ; parce que ces apparences peuvent être causées par les changemens qui arrivent dans notre air & par les mouvemens des nuées, qui font paroître quelquefois de certaines parties des queues plus obscures que d'autres, & que les parties de la voye lactée, que l'on confond avec les queues qui y passent, & qu'on prend pour des parties mêmes de ces queues, peuvent encore causer ces apparences.

La rareté de notre air peut servir à nous faire comprendre comment les vapeurs qui s'exhalent de l'atmosphére des cométes, peuvent suffire à remplir des espaces si immenses. Car l'air occupe prés de la surface de la terre un espace 850 fois environ plus grand que celui qui seroit occupé par le volume d'eau qui auroit le même poids. Ainsi une colonne cylindrique d'air, haute de 850 pieds est du même poids qu'une colonne d'eau qui auroit la même base, & un pied de hauteur. Or la colonne d'air qui va jusqu'à l'extrémité de notre atmosphére est égale en poids à une colonne d'eau de 33 pieds de haut environ & de même base ; & par conséquent, si on ôtoit la partie inférieure de toute la colonne qui compose notre air jusqu'à la hauteur de 850 pieds, le poids du reste supérieur de cette colonne, seroit égal à celui d'une colonne d'eau de la hauteur de 32 pieds. Ainsi, par une regle qu'une infinité d'expériences ont confirmée, sçavoir, que la compression de l'air est comme le poids de l'atmosphére incombant, & que la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance des lieux au centre de la terre, j'ai trouvé (en faisant le calcul selon le Cor. de la Prop. 22. du Liv. 2.) qu'à la hauteur d'un

d'un demi diamétre de la terre au-dessus de sa surface, l'air doit être plus rare qu'ici-bas en une raison beaucoup plus grande que celle de tout l'espace renfermé dans l'orbe de Saturne à un globe d'un pouce de diamétre. Donc un globe d'air d'un pouce de diamétre qui auroit la densité qu'a notre air à un demi diamétre de la terre au-dessus de sa surface, rempliroit toutes les régions des planetes jusqu'à la sphére de Saturne & bien loin encore au-delà: or puisque notre air se raréfie à l'infini, à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la terre, les queues des cométes doivent être formées d'une matiére très-rare, puisque leur chevelure ou leur atmosphère est presque 10 fois plus étendu que le diamétre de leur noyau, & que leurs queues vont encore beaucoup par-delà. Et quoiqu'il se puisse faire, à cause de la densité de l'atmosphére des cométes, de la grande gravitation de ces corps vers le Soleil, & de la gravité des particules de leur air, & de leurs vapeurs les unes vers les autres, que l'air qui les environne dans les espaces célestes, & par conséquent leurs queues ne soient pas aussi raréfiées que notre air; il résulte cependant de tout ceci, qu'une très-petite quantité d'air & de vapeurs peut suffire abondamment à tous les Phénoménes des queues des cométes. D'ailleurs l'extrême rareté de la matiére de ces queues est prouvée par les astres qu'on voit briller à travers.

L'atmosphére terrestre éclairé de la lumiére du Soleil, obscurcit & éteint par son épaisseur presque tous les astres & la Lune même, & cependant il ne s'étend qu'à quelques milles: mais à travers l'épaisseur immense des queues des cométes qui sont éclairées du Soleil de même que notre atmosphére, on voit les plus petites étoiles sans que leur lumiére soit affoiblie. L'éclat des queues de la pluspart des cométes est comparable à peu près à celui de l'air d'une chambre obscure qui réfléchit les rayons du Soleil reçus par un trou d'un pouce ou deux de diamétre.

On peut connoître à peu près quel temps la vapeur met à s'élever de la tête des cométes à l'extrémité de leur queue, en ti-

rant une ligne droite de l'extrémité de cette queue au Soleil, & remarquant le lieu où cette ligne coupe la trajectoire. Car la vapeur à l'extrémité de la queue, si elle s'éloigne en ligne droite du Soleil, commence à s'élever de la tête, dans le temps où la tête se trouve dans le lieu de l'intersection. Mais la vapeur ne s'éloigne pas du Soleil en ligne droite, car elle retient le mouvement que la cométe avoit avant que cette vapeur commençat à monter, & ce mouvement se composant avec celui par lequel la vapeur monte, elle monte obliquement. Ainsi la solution de ce problême sera plus exacte, si cette ligne qui coupe l'orbe est paralléle à la longueur de la queue, ou plutôt, (à cause du mouvement curviligne de la cométe) si cette même ligne diverge de celle de la queue.

Par ce moyen j'ai trouvé, que la vapeur qui étoit à l'extrémité de la queue de la cométe de 1680. le 25 *Janvier*, avoit commencé à s'élever de la tête avant le 11 *Décembre*, & que par conséquent, elle avoit mis plus de 45 jours à monter. Et toute la queue qui parut le 10 *Décembre* étoit montée dans l'espace de deux jours qui s'étoient écoulés depuis le périhélie de la cométe. Cette vapeur montoit donc très-vîte au commencement, lorsque la cométe étoit plus près du Soleil, & ensuite elle continuoit de monter avec un mouvement que sa gravité retardoit toujours, & en montant elle augmentoit la longueur de la queue. La queue, tant qu'elle fut visible, étoit formée de presque toute la vapeur qui s'étoit exhalée de la cométe dans le temps du périhélie ; & la vapeur qui monta la premiére, & qui formoit l'extrémité de la queue, ne s'évanouit que lorsque sa distance, tant du Soleil que de nous, fut si grande, qu'on ne pût plus l'appercevoir. Ainsi les queues des autres cométes qui sont courtes ne sont point formées par des vapeurs qui s'élevent de leurs têtes par un mouvement prompt & continu, & qui ensuite se dissipent, mais ce sont des colonnes permanentes de vapeurs & d'exhalaisons qui sortent de la tête des cométes pendant plusieurs jours par un mou-

vement très-lent, & qui en participant du mouvement que la tête d'où elles s'exhalent avoit lorsqu'elles ont commencé à s'exhaler, continuent ensuite à se mouvoir avec cette tête dans les espaces célestes. Ce qui fournit encore une nouvelle preuve que les espaces célestes sont privés de toute force résistante; puisque non seulement les corps solides tels que les planetes & les cométes, mais même des vapeurs très-rares, (comme celles qui forment les queues des cométes) se meuvent très-librement & d'un mouvement très-rapide dans ces espaces, & qu'elles y conservent leur mouvement pendant très-long-temps.

Kepler attribue l'ascension des queues des cométes qui s'élevent de l'atmosphére de leurs têtes, & le mouvement progressif de ces queues vers les parties opposées au Soleil, à l'action des rayons de lumiére qui emportent avec eux la matiére des queues. Et il n'est point absurde de penser que des vapeurs très-rares puissent céder à l'action des rayons dans des espaces libres de toute résistance, quoique des vapeurs épaisses ne puissent être mûes sensiblement par les rayons du Soleil dans notre atmosphére.

Un autre Astronome a cru qu'il pouvoit y avoir des particules de matiére graves, & d'autres légeres, & que les queues des cométes étoient composées de particules légeres, & que c'étoit par leur légereté qu'elles s'élevoient en s'éloignant du Soleil. Mais la gravité des corps terrestres étant comme la matiére qu'ils contiennent, la quantité de matiére restant la même, la gravité ne peut être ni augmentée ni diminuée. Je soupçonne plutôt que l'élévation des vapeurs qui forment les queues, vient de la raréfaction de cette matiére : car la fumée monte dans une cheminée par l'impulsion de l'air dans lequel elle nâge, cet air raréfié par la chaleur monte, parce que sa gravité spécifique est diminuée, & en montant il emporte la fumée avec lui. Pourquoi les queues des cométes ne s'éleveroient-elles pas de la même maniére du côté opposé au Soleil? Car les rayons du Soleil n'agitent les milieux qu'ils traversent que par la réflexion & la

réfraction. Les particules réfléchissantes étant échauffées par cette action des rayons, échauffent la matiére éthérée avec laquelle elles sont mêlées : cette chaleur qu'elles lui communiquent la raréfie, & cette raréfaction diminuant la gravité spécifique par laquelle elle tendoit auparavant vers le Soleil, cette matiére éthérée monte & emporte avec elle les particules réfléchissantes dont la queue est composée. Les vapeurs qui composent les queues des cométes tournent autour du Soleil, & tendent par conséquent à s'éloigner de cet astre, ce qui contribue encore à leur ascension, car l'atmosphére du Soleil, & la matiére des cieux est dans un repos absolu, ou bien elle tourne plus lentement que la matiére des queues, puisqu'elle tourne par le seul mouvement qu'elle reçoit de la rotation du Soleil.

Ce sont-là les causes de l'ascension des vapeurs qui forment les queues des cométes, lorsqu'elles sont près du Soleil où leurs orbes sont les plus courbes, & où les cométes étant dans le lieu de l'atmosphére du Soleil le plus épais, & par conséquent le plus pesant, projettent les plus longues queues. Car les queues qui commencent alors à paroître conservant leur mouvement, & gravitant cependant vers le Soleil, se meuvent autour de cet astre dans des ellipses comme les têtes des cométes & par ce mouvement elles accompagnent toujours ces têtes, & leur paroissent attachées, quoiqu'elles ne leur soient pas adhérentes. Car la gravité de ces vapeurs vers le Soleil ne les fait pas s'éloigner davantage de leurs têtes pour aller vers le Soleil que la gravité des têtes vers le Soleil ne les fait s'éloigner de leurs queues pour aller vers cet astre. Ainsi elles doivent, par leur gravité commune, tomber en même temps sur le Soleil, ou être retardées de la même maniére en remontant ; ainsi la gravité ne doit point empêcher la tête & la queue des cométes, de prendre facilement entr'elles la position quelconque qui doit suivre des causes dont nous venons de parler ou d'autres causes quelconques, ni de la conserver ensuite sans obstacle.

Les queuës qui se forment dans les périhélies des cométes, doivent donc s'en aller avec leurs têtes dans des régions très-éloignées, & ensuite après une longue suite d'années revenir vers nous avec elles, ou bien s'évanouir peu à peu par la raréfaction. Car lorsque par la suite leur tête descend vers le Soleil, de nouvelles queues très-courtes doivent s'élever de leur tête par un mouvement très-lent, & ces queues doivent augmenter immensement dans le périhélie des cométes qui descendent jusqu'à l'atmosphére du Soleil : car cette vapeur doit se raréfier & se dilater perpétuellement dans les espaces libres où elle se trouve, c'est pourquoi les queues sont toutes plus larges vers leur extrémité supérieure que près de la tête de la cométe.

Ces vapeurs perpétuellement dilatées par la raréfaction, doivent s'étendre & se répandre dans tout le ciel, & elles doivent ensuite peu à peu être attirées par leur gravité vers les planetes avec l'atmosphére desquelles il est vraisemblable qu'elles se mêlent. Car de même que les mers sont nécessaires à la constitution de notre terre, afin que la chaleur du Soleil puisse en élever des vapeurs suffisantes, lesquelles après s'être rassemblées en nuages, retombent en pluyes qui arrosent la terre, la nourrissent & la rendent capable de produire tous les végétaux ; ou bien se condensent sur le sommet des montagnes par le froid qui y régne d'où (selon que quelques-uns le conjecturent avec raison) elles coulent & forment les fontaines & les fleuves : on peut croire que les cométes peuvent par leurs exhalaisons & leurs vapeurs condensées, suppléer & réparer sans cesse ce qui se consume d'humidité dans la végétation & la putréfaction, & ce qui s'en convertit en terre séche dans ces opérations : afin que par ce moyen les mers & l'humidité des planetes ne soit pas consumée. Car tous les végétaux croissent par le moyen de l'humidité, & ensuite la plus grande partie s'en convertit par la putréfaction en terre séche, puisqu'il tombe perpétuellement du limon au fond des liqueurs qui se corrompent. Ainsi la masse de la terre séche

doit augmenter sans cesse, & si les parties fluides ne recevoient pas de l'accroissement par quelques causes, elles devroient diminuer perpétuellement, & à la fin elles viendroient entiérement à manquer. Je soupçonne de plus que cet esprit qui est la plus petite partie de notre air, la plus subtile, & en même temps la plus excellente, puisqu'elle est nécessaire pour donner la vie à toutes choses, vient principalement des cométes.

Les atmosphéres des cométes, en produisant des queues dans leur descente vers le Soleil doivent diminuer, & être plus étroits; (principalement vers la partie qui regarde le Soleil) & réciproquement lorsqu'elles s'éloignent du Soleil, & que leur atmosphére ne fournit plus à la formation des queues, ils doivent devenir plus considérables; & si on s'en rapporte aux observations d'*Hévélius*, ces atmosphéres paroissent les plus petits, lorsque les têtes des cométes étant déja échauffées par le Soleil, elles ont des queues très-longues & très-brillantes, & que ces têtes sont enveloppées vers les parties les plus intérieures de leur atmosphére, par la fumée très-dense & très-noire de leur noyau. Car toute fumée causée par une grande chaleur, doit être d'autant plus noire & plus épaisse. Aussi la tête de la cométe (c'est de celle de 1680. dont nous parlons) à égale distance du Soleil & de la terre, parut-elle plus obscure après son périhélie qu'auparavant. Car au mois de *Décembre* on pouvoit comparer sa lumiére à celle des étoiles de la troisiéme grandeur, & au mois de *Novembre* elle égaloit celles de la seconde & de la premiére. Et ceux qui l'ont vue dans les deux cas parlent de celui où elle étoit plus brillante comme d'une cométe plus grande. Un jeune homme de *Cambridge* qui vit cette cométe le 19 *Novembre*, trouva que sa lumiére, quoiqu'obscurcie & comme plombée, égaloit en clarté l'épi de la Vierge, & qu'elle brilloit plus qu'elle ne brilla depuis. *Montenarus* le 20 *Novembre* v. st. la vit plus grande que les étoiles de la premiére grandeur, sa queue ayant deux dégrés de long. Et le Docteur *Stor*, dans ses lettres qui me sont tombées entre les

mains, marque que sa tête au mois de *Décembre* étoit très-petite, & qu'elle cédoit en grandeur à celle de la cométe qui avoit paru au mois de *Novembre* avant le lever du Soleil, quoiqu'alors sa queue fut la plus grande & la plus brillante. Il y conjecture que cela pouvoit être attribué à ce que, au commencement, la matiére de la tête étoit en plus grande quantité, & qu'elle s'étoit peu à peu consumée.

C'est vraisemblablement par la même raison, que les cométes qui ont les queues les plus longues & les plus brillantes ont les têtes les plus obscures & les plus petites. Car le 5 *Mars* n. st. de l'année 1668, à 7 heures du soir, le R.P. *Valentin Estancius* étant au *Brésil* vit une cométe près de l'horison vers le coucher du Soleil dont la tête étoit très-petite & à peine visible, & qui avoit une queue si brillante, que ceux qui étoient sur le rivage la pouvoient voir aisément se peindre dans la mer. Elle ressembloit à une poutre brillante de 23 ^{d} de long, elle s'étendoit de l'Occident vers le Midy, & elle étoit presque paralléle à l'horison. Cet éclat ne dura que trois jours après lesquels il diminua considérablement; & à mesure que l'éclat de cette queue diminuoit, sa grandeur augmentoit, & on dit même qu'en *Portugal* elle occupoit presque la quatriéme partie du ciel, c'est-à-dire, 45 ^{d} de l'Occident vers l'Orient, avec un éclat très-considérable; & cependant cette cométe ne parut jamais toute entiére; car sa tête, dans ces régions, étoit toujours cachée sous l'horison.

L'augmentation de cette queue, lorsque son éclat diminuoit, prouve clairement que la tête de la cométe s'éloignoit du Soleil & qu'elle étoit le plus près du Soleil dans le commencement de son apparition, comme la cométe de 1680.

On lit dans la Chronique Saxonne qu'il parut une cométe semblable dans l'année 1106. *dont l'étoile étoit petite, & obscure* (comme celle de l'année 1680.) *mais dont la queue étoit très-brillante, & s'étendoit comme une grande poutre vers le Nord-Est*, comme le rapporte aussi *Hévélius* d'après *Simon moine de Dunel-*

menfis, elle parut au commencement de *Février* & les jours fuivans vers le foir. Et l'on peut conclure de la pofition de fa queue que fa tête étoit très-proche du Soleil. *Elle étoit diftante du Soleil*, dit *Matthieu de Paris*, *environ d'une coudée. Depuis la troifiéme heure* (& plus correctement depuis la fixiéme) *jufqu'à la neuviéme elle jettoit une grande lumière qui s'étendoit fort loin.* Telle étoit cette cométe toute de feu, décrite par *Ariftote* au Liv. 1. Met. 6. *fa tête*, dit-il, *ne fe voyoit pas le premier jour, parce qu'elle fe couchoit avant le Soleil, ou plutôt parce qu'elle fe perdoit dans fes rayons, le jour d'enfuite, c'eft tout ce qu'on put faire que de l'appercevoir, car elle ne s'éloigna du Soleil que d'une diftance très-petite, & elle fe coucha prefqu'auffitôt après lui. Et à caufe de fon extrême clarté* (c'eft-à-dire, de fa queue) *fa tête ne paroiffoit pas encore étant toute couverte de feu, mais enfuite* (continue *Ariftote*) *lorfqu'elle commença*, (c'eft-à-dire, la queue) *à être moins ardente, on commença à voir la face de la cométe* (c'eft-à-dire, fa tête,) *& fa clarté s'étendoit jufqu'à la troifiéme partie du ciel.* (c'eft donc à dire à 60 dégrés.) *Elle parut dans l'Hyver* (la quatriéme année de la 101ᵉ Olympiade) *& après s'être élevée jufqu'à la ceinture d'Orion, elle y difparut.*

La cométe de 1618. qui fortit des rayons du Soleil avec une très-grande queue paroiffoit égaler ou même furpaffer un peu les étoiles de la premiére grandeur, mais on a vu beaucoup d'autres cométes plus grandes qui avoient de très-petites queues. Il y en a eu qui, au rapport de quelques-uns, égaloient Venus, d'autres Jupiter, & d'autres même la Lune en grandeur.

Nous concluons donc de tout ceci que les cométes font du genre des planetes, & qu'elles tournent autour du Soleil dans des orbes très-excentriques. Et comme parmi les planetes qui n'ont point de queues, celles qui tournent dans de plus petits orbes & le plus près du Soleil font les plus petites, il eft vraifemblable que les cométes, qui dans leur périhélie approchent le plus près du Soleil, font de beaucoup plus petites que les autres, afin que par leur attraction elles ne dérangent pas le Soleil. Au refte, je laiffe à déterminer

déterminer les diamétres tranſverſaux des orbes des cométes & les temps périodiques de leurs révolutions quand on pourra comparer les révolutions des cométes qui reviennent après un long eſpace de temps décrire les mêmes orbites : en attendant, la propoſition ſuivante pourra répandre quelque lumiére ſur cette recherche.

PROPOSITION XLII. PROBLÊME XXII.

Corriger la trajectoire trouvée d'une comète.

Opération première. Il faut prendre la poſition du plan de la trajectoire, laquelle poſition a été trouvée par la Prop. précédente, & choiſir trois lieux de la comète qui ayent été déterminés par des obſervations bien éxactes, & qui ſoient fort éloignés les uns des autres ; que *A* ſoit le temps écoulé entre la premiére & la ſeconde obſervation, & *B* celui qu'il y a eu entre la ſeconde & la troiſiéme. Il faut que la comète ait été dans ſon périgée dans un de ces lieux, ou que du moins elle n'en ait pas été fort éloignée. Par le moyen de ces lieux apparens ſoient trouvés par des opérations trigonométriques, trois lieux vrais de la comète, dans le plan choiſi pour la trajectoire. Enſuite par ces lieux trouvés, ſoit décrite, par les opérations arithmétiques indiquées dans la Prop. 21. du Liv. 1. une ſection conique ayant le centre du Soleil pour foyer, que les aires de cette courbe, leſquelles ſont terminées par des rayons tirés du Soleil aux lieux trouvés, ſoient *D* & *E* : c'eſt-à-dire, *D* l'aire décrite pendant le temps écoulé entre la premiére & la ſeconde obſervation, & *E* celle qui a été décrite pendant celui qui s'eſt écoulé entre la ſeconde & la troiſiéme, & que *T* ſoit le temps total pendant lequel l'aire totale $D + E$ doit être décrite par la comète avec la vîteſſe qui a été trouvée dans la Prop. 16. du Liv. 1.

Opération 2e. Que la longitude des nœuds du plan de la trajectoire ſoit augmentée, en ajoutant à cette longitude 20′ ou 30′, que j'appelle *P* ; & que l'inclinaiſon de ce plan à celui de l'éclip-

tique reste la même. Ensuite par le moyen des trois lieux observés de la comète desquels on a parlé, soyent trouvés dans ce nouveau plan, trois lieux vrais comme ci-dessus; l'orbe qui passe par ces trois points, les deux aires de cet orbe décrites entre les observations lesquelles j'appelle d & e, ainsi que le temps total pendant lequel l'aire totale $d + e$ doit être décrite.

Opération 3. Soit conservée la longitude des nœuds dans la première opération, & soit augmentée l'inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique en ajoutant à cette inclinaison $20'$ ou $30'$, lesquelles j'appelle Q. Ensuite par les trois lieux apparens de la comète, lesquels on a observés, & dont nous avons déja parlé, soient trouvés trois lieux vrais dans ce nouveau plan ainsi que l'orbite qui passe par ces lieux, les deux aires de cette orbite décrites entre les observations, lesquelles j'appelle δ & ε & le temps total τ pendant lequel l'aire totale $\delta + \varepsilon$ doit être décrite.

Maintenant, soit $C : 1 :: A : B$, & $G : 1 :: D : E$; soit de plus $g : 1 :: d : e$ & $\gamma : 1 :: \delta : \varepsilon$; S représentant le temps vrai écoulé entre la premiere & la troisiéme observation, & les signes $+$ & $-$ étant mis comme ils le doivent être, on cherchera les nombres m & n par cette loi, que $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & que $2T - 2S = MT - mt + nT - n\tau$. Et si dans la premiére opération i représente l'inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique, & K la longitude de l'un ou de l'autre nœud, $i + nQ$ sera la vraie inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique, & $K + m\rho$ la vraie longitude du nœud. Et enfin, si dans la premiere, la seconde & la troisiéme opération, les quantités R, r & S représentent les paramétres de la trajectoire, & les quantités $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ les paramétres transversaux respectifs: le vrai paramêtre de la trajectoire que la comète décrit, sera $R + mr - mR + n\rho - nR$ & son vrai paramétre transversal sera $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$: or le pa-

ramétre tranſverſal de la cométe étant donné, ſon temps périodique le ſera auſſi. *C. Q. F. T.*

Au reſte les temps périodiques des cométes & les paramétres tranſverſaux de leurs orbes, ne peuvent étre déterminés avec une certaine précision, qu'en comparant entr'elles les cométes qui paroiſſent en divers temps. Si pluſieurs cométes après des intervales de temps égaux, décrivent le même orbe, on doit en conclure que ces cométes ne font qu'une ſeule & même cométe qui fait ſa révolution dans le même orbe. Et enfin, par les temps des révolutions on trouvera les paramétres tranſverſaux des orbes, & par ces paramétres on déterminera les orbes elliptiques.

Pour y parvenir il faut donc calculer les trajectoires de pluſieurs cométes en les ſuppoſant paraboliques, car cette ſorte de trajectoire s'accordera toujours à peu près avec les Phénoménes. C'eſt ce qui eſt prouvé, non-ſeulement par la trajectoire parabolique de la cométe de 1680. que j'ai comparée ci-deſſus avec les obſervations, mais encore par celle de cette fameuſe cométe qui parut dans les années 1664. & 1665. & qui a été obſervée par *Hevelius*. Cet aſtronome a calculé auſſi d'après ſes obſervations les latitudes & les longitudes de cette cométe, mais moins exactement.

Halley a calculé de nouveau d'après ces mêmes obſervations les lieux de cette cométe, & enfin par le moyen de ſes lieux ainſi trouvés il a déterminé ſa trajectoire. Il a placé ſon nœud aſcendant dans le $21^d\ 13'\ 55''$ des ♊, l'inclinaiſon de ſon orbite au plan de l'écliptique de $21^d\ 18'\ 40''$, la diſtance du périhélie au nœud dans l'orbite de $49^d\ 27'\ 30''$, ſon périhélie dans $8^d\ 40'\ 30''$ du ♌ avec une latitude auſtrale héliocentrique de $16^d\ 1'\ 45''$, il a trouvé de plus, que la cométe étoit dans le périhélie le 24 *Novembre* à $11^h\ 52'$ après midi du temps moyen à *Londres*, ou à *Dantzig* $13^h\ 8'$ *V. S.* & le paramétre de la parabole de 410286 parties, la moyenne diſtance du Soleil à la terre en ayant 100000.

On verra par la table ſuivante qui a été calculée par *Halley*, combien les lieux de la cométe calculés dans cet orbe, s'accordent exactement avec les obſervations.

Temps apparent à Dantzig. V. S.	*Distances de la comète observées.*	*Lieux observés.*	*Lieux calculés dans l'orbe.*
	d ′ ″	d ′ ″	d ′ ″
Déc. 1664.			
3^j 18^h 29′ ½	du cœur du Lion. 46.24.20 de l'épi de la Vierge. 22.52.10	Long. ♎ 7. 1. 0 Lat. aust. 21.39. 0	♎ 7. 1.29 21.38.50
4. 18. 1 ½	du cœur du Lion. 46. 2.45 de l'épi de la Vierge. 23.52.40	Long. ♎ 16.15. 0 Lat. aust. 22.24. 0	♎ 6.16. 5 22.24. 0
7. 17. 48	du cœur du Lion. 44.48. 0 de l'épi de la Vierge. 27.56.40	Long. ♎ 3, 6. 0 Lat. aust. 25.22. 0	♎ 3. 7.33 25.21.40
17. 14. 43	du cœur du Lion. 53.15.15 de l'ép. droite d'Or. 45.43.30	Long. ♌ 2.56. 0 Lat. aust. 49.25. 0	♌ 2.56. 0 49.25. 0
19. 9. 25	de Procyon. 35.13.50 de la claire de la machoire de la Baleine. 52.56. 0	Long. ♊ 28.40.30 Lat. aust. 45.48. 0	♊ 28.43. 0 45.46. 0
20. 9. 53 ½	de Procyon. 40.49. 0 de la claire de la machoire de la Baleine. 40. 4. 0	Long. ♊ 13. 3. 0 Lat. aust. 39.54. 0	♊ 13. 5. 0 39.53. 0
21. 9. 9 ½	de l'ép. droite d'Or. 26.21.25 de la claire de la machoire de la Baleine. 29.28. 0	Long. ♊ 2.16. 0 Lat. aust. 33.41. 0	♊ 2.18.30 33.39.40
22. 9. 0	de l'ép. droite d'Or. 29.47. 0 de la claire de la machoire de la Baleine. 20.29.30	Long. ♉ 24.24. 0 Lat. aust. 27.45. 0	♉ 24.27. 0 27.46. 0
26. 7. 58	de la claire du Bélier. 23.20. 0 d'Aldébaran. 26.44. 0	Long. ♉ 9. 0. 0 Lat. aust. 12.36. 0	♉ 9. 2.28 12.34.13
27. 6. 45	de la claire du Bélier. 20.45. 0 d'Aldébaran. 28.10. 0	Long. ♉ 7. 5.40 Lat. aust. 10.23. 0	♉ 7. 8.45 10.23.13
28. 7. 39	de la claire du Bélier. 18.29. 0 des Hyades. 20.37. 0	Long. ♉ 5.24.45 Lat. aust. 8.22.50	♉ 5.27.52 8.23.37
31. 6. 45	de la ceinture d'And. 30.48.10 des Hyades. 32.53.30	Long. ♉ 2. 7.40 Lat. aust. 4.13. 0	♉ 2. 8.20 4.16.25
Janv. 1665. 7. 7. 37 ½	de la ceinture d'And. 25.11. 0 des Hyades. 37.12.25	Long. ♈ 28.24.47 Lat. bor. 0.54. 0	♈ 28.24. 0 0.53. 0
13. 7. 0.	de la tête d'Androm. 28. 7.10 des Hyades. 38.55.20	Long. ♈ 27. 6.54 Lat. bor. 3. 6.50	♈ 27. 6.39 3. 7.40
24. 7. 29	de la ceinture d'And. 20.32.15 des Hyades. 40. 5. 0	Long. ♈ 26.29.15 Lat. bor. 5.25.50	♈ 26.28.50 5.26. 0
Février. 7. 8. 37		Long. ♈ 27. 4.46 Lat. bor. 7. 3.20	♈ 27.24.55 7. 3.15
22. 8. 46		Long. ♈ 28.29.46 Lat. bor. 8.12.36	♈ 28.29.58 8.10.25
Mars. 1. 8. 16		Long. ♈ 29.18.15 Lat. bor. 8.36.26	♈ 29.18.20 8.36.12
7. 8. 37		Long. ♈ 0. 2.48 Lat. bor. 8.56.30	♉ 0. 2.42 8.56.56

Au mois de *Février* de l'année suivante 1665. la premiére étoile d'*Aries* que j'appellerai dorénavant γ, étoit dans ♈ 28^d 30′ 15″ ayant une latitude boréale de 7^d 8′ 58″.

La seconde d'*Aries* étoit dans ♈ 29^d 17′ 18″ avec une latitude boréale de 8^d 28′ 16″.

Et une autre étoile de la septiéme grandeur que j'appellerai *A*, étoit dans ♈ 28^d 24′ 45″ ayant une latitude boréale de 8^d 28′ 33″, or la cométe le 7 *Février* 7′ 30″ à *Paris*, (c'est-à-dire, le 7 *Février* 8′ 37″ *V. S.* à *Dantzig*) faisoit un triangle avec ces étoiles γ & *A*, lequel étoit rectangle en γ. Et la distance de la cométe à l'étoile γ, étoit égale à la distance des étoiles γ & *A* entr'elles, c'est-à-dire, qu'elle étoit de 1^d 19′ 46″ d'un grand cercle, & par conséquent elle étoit de 1^d 20′ 26″ dans le paralléle de latitude de l'étoile γ. Donc, si de la longitude de l'étoile γ, on en ôte la longitude de 1^d 20′ 26″, il restera la longitude de la cométe dans ♈ de 27^d 9′ 49″.

Auzout qui avoit fait cette observation, en conclut que la cométe étoit à peu prés dans ♈ 27^d 0′ & par la figure dans laquelle *Hook* a tracé son mouvement, elle étoit dans ♈ 26^d 59′ 24″; ainsi en prenant un milieu entre ces positions je l'ai mis dans ♈ 27^d 4′ 46″.

Par la même observation *Auzout* détermina la latitude de la cométe à 7^d 4′ ou 5′ vers le nord : elle l'auroit été plus éxactement à 7^d 3′ 29″, en supposant toutesfois la différence des latitudes de la cométe & de l'étoile γ égale à la différence des longitudes des étoiles γ & *A*.

Le 22 *Février* à 7^h 30′ à *Londres*, c'est-à-dire, le 22 *Février* à 8^h 46′ à *Dantzig*, la distance de la cométe à l'étoile *A*, selon l'observation de *Hook* qu'il avoit tracée même dans une figure, & selon la figure de *Petit* tracée d'aprés les observations d'*Auzout*, étoit la cinquiéme partie de la distance entre l'étoile *A* & la premiére d'*Aries*, ou 15′ 57″. Et la distance de la cométe à la ligne qui joint l'étoile *A* & la premiére d'*Aries* étoit la qua-

triéme partie de cette cinquiéme partie, c'est-à-dire, 41′ La comete étoit donc dans ♈ 28 d 29′ 46″ ayant 8 d 12′ 36″ de latitude boréale.

Le premier *Mars* à 7 h 0′ à *Londres*, qui reviennent à 8 h 16′ à *Dantzig*, la cométe fut observée près de la seconde *d'Aries*, la distance entre la cométe & cette étoile, étant à la distance entre la premiére & la seconde d'*Aries*, c'est-à-dire, à 1 d 33′ comme 4 à 45 selon *Hook*, ou comme 2 à 23 selon *Gottignies*; ou bien, en prenant un milieu entre ces positions, de 8′ 10″. Mais la cométe, selon *Gottignies*, avoit alors précédé la seconde d'*Aries* presque de la quatriéme ou cinquiéme partie du chemin qu'elle faisoit en un jour, c'est-à-dire, de 1′ 35″ environ, (en quoi il s'accorde assez bien avec *Auzout*) ou un peu moins selon *Hook*, comme 1′ par exemple. Donc, si à la longitude de la premiére d'*Aries*, on ajoute 1′, & 8′ 10″ à sa latitude, on aura la longitude de la cométe de 29 d 18′ & sa latitude boréale de 8 d 36′ 26″

Le 7 de *Mars* à 7 h 30′ à *Paris* (qui font 8 h 37′ à *Dantzig*) la distance de la cométe à la seconde d'*Aries* étoit, selon les observations d'*Auzout*, égale à la distance de la seconde d'*Aries* à l'étoile *A*, c'est-à-dire, qu'elle étoit de 52′ 29″ & la différence des longitudes de la cométe & de la seconde d'*Aries* étoit de 45′ ou 46′; ou en prenant un milieu entre ces positions de 45′ 30″. Donc la cométe étoit dans ♉ 0 d 2′ 48″. Selon la figure construite par *Petit* sur les observations d'*Auzout*, *Hevelius* a conclu la latitude de cette cométe de 8 d 54′, mais le graveur a courbé un peu irréguliérement le chemin de la cométe vers la fin de son mouvement, *Hevelius* a corrigé cette incurvation irréguliére dans la figure qu'il a tracée d'après les observations d'*Auzout*, & il a fixé la latitude de la cométe à 8 d 55′ 30″, & en corrigeant l'irrégularité, la latitude peut aller à 8 d 56′ ou à 8 d 57′.

Cette cométe fut encore vue le 9 *Mars*, & alors elle devoit être dans ♉ 0 d 18′ ayant 9 d 3′ $\frac{1}{2}$ environ de latitude boréale.

Cette cométe parut trois mois, elle parcourut presque six signes,

& elle faisoit près de 20′ par jour. Son orbe étoit fort différent d'un grand cercle, il étoit incurvé vers le Nord; & sur la fin son mouvement de rétrograde devint direct. Ce cours si peu ordinaire s'accorda depuis le commencement jusqu'à la fin aussi exactement avec la théorie, que le cours des planétes a coutume de s'accorder avec leur théorie, comme on le verra par la table suivante. Il faut cependant soustraire deux minutes environ pour le temps où la comète avoit la plus grande vîtesse; ce qu'on fera en ôtant douze secondes de l'angle compris entre le nœud ascendant & le périhélie, ou en faisant cet angle de 49 ^{d} 27′ 18″. La parallaxe annuelle de ces deux cométes (sçavoir de celle-ci & de la précédente) étoit très-considérable, ce qui démontre le mouvement de la terre dans son grand orbe.

Cette théorie est encore confirmée par le mouvement de la cométe qui parut dans l'année 1683. Celle-là fut rétrograde dans son orbe, dont le plan faisoit avec l'écliptique un angle presque droit. Son nœud ascendant étoit (selon le calcul de *Halley*) dans ♍ 23 ^{d} 23′: l'inclinaison de son orbe à l'écliptique étoit de 83 ^{d} 11′: son périhélie étoit dans ♊ 25 ^{d} 29′ 30″, & la distance de son périhélie au Soleil étoit de 56020 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000, & son périhélie arriva le 2 *Juillet* à 3 ^{h} 50′. Les lieux de la cométe dans cet orbe ont été calculés par *Halley*, & on les trouve dans la table suivante comparés avec les lieux observés par *Flamstead*.

1683. Temps moy.	Lieu du soleil.	Long. calculées de la comét.	Latit. boréal. calcul.	Long. observées de la comét.	Lat. boréales observ.	Differ. des longitud.	Differ. des latitud.
Jours. h ′	d ′ ″	d ′ ″	d ′ ″	d ′ ″	d ′ ″	′ ″	′ ″
Juill. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37. 4	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	— 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	— 0.53	— 1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	— 0.39	— 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	— 2. 7
Août. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	— 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	23.12.19	— 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	— 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	— 2. 2	— 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	— 4.30	— 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	— 1.12	— 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15	♉ 24.49. 5	5. 9.11	— 3.48	— 2. 4
			Austr.		Austr.		
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	— 0. 2	— 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	— 1. 1	— 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	— 1.31	+ 0.20

La théorie précédente est encore confirmée par le mouvement de la cométe rétrograde qui parut l'année 1682. Son nœud ascendant, selon le calcul de ***Halley***, étoit dans ♉ 21^{d} 16′ 30″, l'inclinaison de son orbite au plan de l'écliptique étoit de 17^{d} 56′ 0″. Son périhélie étoit dans ♒ 2^{d} 52′ 50″, sa distance périhélie au Soleil de 58328 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000. Et le temps corrigé de son périhélie étoit le 4 de *Septembre* à 7^{h} 39′. L'on trouve dans la table suivante, la comparaison de ces lieux calculés sur les observations de ***Flamstead*** avec les lieux que donne la théorie.

Temps apparent, 1682.	Lieu du soleil.	Long. de la comète calculées.	Latitudes bor. calcul.	Long. de la comète observées.	Latit. boréal. observ.	Differ. des longitud.	Differ. des latitud.
Jours. h '	° ' ''	° ' ''	° ' ''	° ' ''	° ' ''	' ''	' ''
Août. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20 15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.21	26.12.52	+0. 1	+ .50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	−0.47	+2.21
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	16.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	15.42. 0	12.23.48	25.41.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Enfin le mouvement rétrograde de la comète qui parut en 1723. confirme encore cette théorie, son nœud ascendant (selon le calcul du Docteur *Bradley*, Professeur Savilien d'astronomie à *Oxford*) étoit dans ♈ 14° 16', l'inclinaison de son orbe au plan de l'écliptique étoit de 49° 59'. Son périhélie étoit dans ♉ 12° 15' 20''. Sa distance périhélie au Soleil étoit de 998651 parties, le rayon du grand orbe étant de 1000000, & le temps corrigé de son périhélie étoit le 16 *Septembre* à 16 h 10'. Les lieux de cette comète dans cet orbe, calculés par *Bradley*, & comparés avec les lieux qui furent observés par lui-même, par *Pound* son grand oncle, & par le Docteur *Halley*, se trouvent dans la table suivante.

1723. Temps moyen.		Longit. observ. de la cométe.	Latit. boréales observ.	Longit. de la cométe calc.	Latit. boréales calc.	Diff. des Long.	Diff. des Lat.
Jours.	h ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Oct. 9.	8. 5	≈7.22.15	5. 2. 0	≈7.21.26	5. 2.47	+49	−47
10.	6.21	6.41.12	7.44.13	6.41.42	7.43.18	−50	+55
12.	7.22	5.39.58	11.55. 0	5.40.19	11.54.55	−21	+ 5
14.	8.57	4.59.49	14.43.50	5. 0.37	14.44. 1	−48	−11
15.	6.35	4.47.41	15.40.51	4.47.45	15.40.55	− 4	− 4
21.	6.22	4. 2.32	19.41.49	4. 2.21	19.42. 3	+11	−14
22.	6.24	3.59. 2	20. 8.12	3.59.10	20. 8.17	− 8	− 5
24.	8. 2	3.55.29	20.55.18	3.55.11	20.55. 9	+18	+ 9
29.	8.56	3.56.17	22.20.27	3.56.42	22.20.10	−25	+17
30.	6.20	3.58. 9	22.32.28	3.58.17	22.32.12	− 8	+16
Nov. 5.	5.53	4.16.30	23.38.33	4.16.23	23.38. 7	+ 7	+26
8.	7. 6	4.29.36	42. 4.10	4.29.54	24. 4 40	−18	−10
14.	6.20	5. 2.16	24.48.46	5. 2.51	24.48.16	−35	+30
20.	7.45	5.42.20	25.24.45	5.43.13	25.25.17	−53	−32
Déc. 7.	6.45	8. 4.13	26.54.18	8. 3.55	26.53.42	+18	+36

Ces exemples ſuffiſent pour prouver que les mouvemens des cométes ſe déduiſent auſſi exactement de la théorie que nous venons d'expoſer que les mouvemens des planétes ſe tirent de la leur. Ainſi on peut, par cette théorie, calculer les orbes des cométes, & l'on pourra connoître par la ſuite le temps périodique d'une cométe révolvante dans un orbe quelconque, & parvenir par ce moyen à connoître tant les axes de leurs orbes, ſuppoſés elliptiques, que leurs diſtances aphélies.

La cométe rétrograde qui parut en 1607. décrivit un orbe, dont le nœud aſcendant (ſelon le calcul de *Halley*) étoit dans ♉ 20° 21′, l'inclinaiſon du plan de ſon orbite au plan de l'écliptique de 17° 2′. Le périhélie à ≈ 2° 16′, la diſtance périhélie de 58680 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000; le tems du périhélie de cette cométe étoit le 16 *Octobre* à 3 h 50′.

Cet orbe s'accorde aſſez juſte avec celui de la cométe qui parut en 1682.

En ſuppoſant que ces deux cométes n'ayent été qu'une ſeule

& même cométe, on trouvera que le temps de sa révolution est de 75 ans, que le grand axe de son orbe est au grand axe de l'orbe de la terre comme $\sqrt{c : 75 \times 75}$ à 1 ou comme 1778 à 100 environ, & que la distance aphélie de cette cométe est à la distance moyenne de la terre au Soleil comme 35 à 1 environ. Ce qui étant connu, il ne sera pas difficile de déterminer l'orbe elliptique de cette cométe. Tout cela se trouvera prouvé si cette cométe revient dans ce même orbe au bout de 75 ans. Il paroît que les autres cométes employent plus de temps à faire leurs révolutions, & qu'elles montent à de plus grandes distances.

Au reste les cométes doivent troubler sensiblement leurs cours par leur attraction mutuelle, tant à cause de leur grand nombre & de leur grand éloignement du Soleil dans leurs aphélies, que du temps qu'elles demeurent dans ces aphélies, ce qui doit tantôt diminuer & tantôt augmenter leurs excentricités & les tems de leurs révolutions. Ainsi il ne faut pas espérer que la même cométe décrive toujours le même orbe, ni que son temps périodique soit toujours éxactement le même. Il suffit que les variations n'excedent pas celles qu'on peut attribuer à ces causes.

On peut trouver par-là la raison pour laquelle les cométes ne sont point renfermées dans le Zodiaque comme les planétes, & pourquoi elles sont portées par des mouvemens divers dans toutes les régions du ciel; car c'est afin que dans leurs aphélies, où leur mouvement est très-lent, elles soient assez éloignées les unes des autres pour que leur attraction mutuelle ne soit pas trop sensible. C'est par cette raison que les cométes qui descendent de plus haut, & qui par conséquent se meuvent plus lentement dans leurs aphélies, doivent remonter plus haut.

La cométe qui parut l'année 1680. étoit à peine éloignée du soleil, dans son périhélie, de la sixiéme partie du diamétre du Soleil; & à cause de l'extrême vîtesse qu'elle avoit alors & de la densité que peut avoir l'atmosphére du Soleil, elle dut éprouver quelque résistance, & par conséquent son mouvement dut

être un peu retardé, & elle dut approcher plus près du Soleil, & en continuant d'en approcher toujours plus près à chaque révolution, elle tombera à la fin sur le globe du Soleil. Dans l'aphélie où son mouvement est plus lent, elle peut être retardée par l'attraction des autres comètes & tomber tout-a-coup dans le Soleil. Ainsi les étoiles fixes qui peu à peu s'épuisent en rayons & en vapeurs, peuvent se renouveller par des comètes qui viennent y tomber, & en se rallumant par le moyen de ce nouvel aliment, paroître de nouvelles étoiles. De ce genre sont les étoiles fixes qui paroissent tout d'un coup, qui sont au commencement dans tout leur brillant, & qui ensuite disparoissent peu à peu. Telle fut l'étoile que *Cornelius Gemma* apperçut le 8 *Novembre* 1572. dans la chaise de *Cassiopée*, en examinant cette partie du ciel par une nuit peu seraine, & qu'il vit la nuit suivante (c'est-à-dire, le 9 *Novembre*) plus brillante qu'aucune étoile fixe, & le cédant à peine en lumière à Venus. *Ticho-Brahé* vit cette même étoile le 11 du même mois dans le tems où son éclat étoit le plus vif. Depuis ce jour elle diminua peu à peu, & dans l'espace de 16 mois il la vit s'évanouir.

Au mois de *Novembre*, où elle commença à paroître, sa lumiére égaloit celle de Venus.

Au mois de *Décembre* suivant à peine étoit-elle diminuée, & elle égaloit encore Jupiter.

Au mois de *Janvier* 1573. elle étoit plus petite que Jupiter, & plus grande que Sirius.

A la fin de *Février* & au commencement de *Mars* elle devint égale à Sirius.

Aux mois d'*Avril* & de *May* elle n'étoit plus que de la seconde grandeur.

Aux mois de *Juin*, *Juillet* & *Aout* elle étoit de la troisiéme.

Aux mois de *Septembre*, d'*Octobre* & de *Novembre*, elle étoit de la quatriéme.

Au mois de Décembre 1573. & au mois de *Janvier* de l'année 1574. elle ne fut plus que de la cinquiéme.

Au mois de *Février* elle étoit de la sixiéme.

Et enfin au mois de *Mars* elle disparut.

La couleur dans le commencement fut claire, blanchâtre & très brillante, ensuite elle devint jaunâtre.

Au mois de *Mars* 1573. elle étoit rougeâtre à peu près comme *Mars*, ou l'étoile Aldébaran.

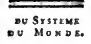
Au mois de *May* elle devint d'un blanc livide tel que celui de Saturne, & elle conserva cette couleur jusqu'à la fin devenant cependant toujours plus obscure.

Telle fut aussi l'étoile que les disciples de *Kepler* apperçurent pour la premiere fois le 30 *Septembre* 1604, V. S. dans le pied droit du Serpentaire, & qui surpassoit déja Jupiter en lumiére, quoique la nuit précédente elle eut parut très-petite. Elle commença ensuite à décroître peu à peu, & on cessa de l'appercevoir au bout de 15 ou 16 mois.

Ce fut une nouvelle étoile de cette espéce qui parut si brillante du temps d'*Hipparque*, qu'elle le détermina, comme le rapporte *Pline*, à observer les fixes, & à en donner un catalogue.

Les étoiles qui paroissent & disparoissent tour à tour, dont la lumiére s'augmente peu à peu, & qui ne passent pas la troisiéme grandeur, paroissent être d'un autre genre, & nous montrer dans leur révolution tantôt une partie brillante & tantôt une partie obscure de leur disque.

Les vapeurs qui s'exhalent du Soleil, des étoiles fixes, & des queues des cométes, peuvent tomber par leur gravité dans les atmosphéres des planétes, s'y condenser, & s'y convertir en eau & en esprits humides, & ensuite par une chaleur lente, se changer peu à peu en sels, en souffres, en teintures, en limon, en argile, en boue, en sable, en pierre, en corail, & en d'autres matiéres terrestres.



SCHOLIE GE'NE'RAL.

L'hypothéſe des tourbillons eſt ſujette à beaucoup de difficultés. Car afin que chaque planéte puiſſe décrire autour du Soleil des aires proportionnelles au temps, il faudroit que les temps périodiques des parties de leur tourbillon fuſſent en raiſon doublée de leurs diſtances au Soleil.

Afin que les temps périodiques des planétes ſoient en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances au Soleil, il faudroit que les temps périodiques des parties de leurs tourbillons fuſſent en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances à cet aſtre.

Et afin que les petits tourbillons qui tournent autour de Saturne, de Jupiter & des autres planétes, puiſſent ſubſiſter & nâger librement dans le tourbillon du Soleil, il faudroit que les temps périodiques des parties du tourbillon ſolaire fuſſent égaux. Or les révolutions du Soleil & des planétes autour de leur axe qui devroient s'accorder avec les mouvemens des tourbillons, s'éloignent beaucoup de toutes ces proportions.

Les cométes ont des mouvemens fort réguliers, elles ſuivent dans leurs révolutions les mêmes loix que les planétes; & leur cours ne peut s'expliquer par les tourbillons. Car les cométes ſont tranſportées par des mouvemens très-excentriques dans toutes les parties du ciel, ce qui ne peut s'exécuter ſi on ne renonce aux tourbillons.

Les projectiles n'éprouvent ici-bas d'autre réſiſtance que celle de l'air, & dans le vuide de *Boyle* la réſiſtance ceſſe, enſorte qu'une plume & de l'or y tombent avec une égale viteſſe. Il en eſt de même des eſpaces céleſtes au-deſſus de l'atmoſphére de la terre, leſquels ſont vuides d'air : tous les corps doivent ſe mouvoir très-librement dans ces eſpaces ; & par conſéquent les planétes & les cométes doivent y faire continuellement leurs révolutions dans des orbes donnés d'eſpéce & de poſition, en ſuivant

les loix ci-dessus exposées. Et elles doivent continuer par les loix de la gravité à se mouvoir dans leurs orbes, mais la position primitive & réguliére de ces orbes ne peut être attribuée à ces loix.

Les six planétes principales font leurs révolutions autour du Soleil dans des cercles qui lui sont concentriques, elles sont toutes à peu près dans le même plan, & leurs mouvemens ont la même direction.

Les dix Lunes qui tournent autour de la terre, de Jupiter & de Saturne dans des cercles concentriques à ces planétes, se meuvent dans le même sens & dans les plans des orbes de ces planétes à peu près. Tous ces mouvemens si réguliers n'ont point de causes méchaniques; puisque les cométes se meuvent dans des orbes fort excentriques, & dans toutes les parties du ciel.

Par cette espece de mouvement les cométes traversent très-vîte & très-facilement les orbes des planétes, & dans leur aphélie, ou leur mouvement est très-lent, & où elles demeurent très-longtemps, elles sont si eloignées les unes des autres que leur attraction mutuelle est presque insensible.

Cet admirable arrangement du Soleil, des planétes & des cométes, ne peut être que l'ouvrage d'un être tout-puissant & intelligent. Et si chaque etoile fixe est le centre d'un sistême semblable au nôtre, il est certain, que tout portant l'empreinte d'un même dessein, tout doit être soumis à un seul & même Etre: car la lumiere que le Soleil & les etoiles fixes se renvoyent mutuellement est de même nature. De plus, on voit que celui qui a arrangé cet Univers, a mis les etoiles fixes à une distance immense les unes des autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur gravité.

Cet Etre infini gouverne tout, non comme l'ame du monde, mais comme le Seigneur de toutes choses. Et à cause de cet empire, le Seigneur-Dieu s'appelle Παντοκράτωρ, c'est-à-dire, *le Seigneur universel*. Car *Dieu* est un mot relatif & qui se rapporte à

des ferviteurs : & l'on doit entendre par divinité la puiffance fuprême non pas feulement fur des êtres matériels, comme le penfent ceux qui font Dieu uniquement l'ame du monde, mais fur des êtres penfans qui lui font foumis. Le Très-haut eft un Etre infini, éternel, entierement parfait : mais un Etre, quelque parfait qu'il fût, s'il n'avoit pas de domination, ne feroit pas Dieu. Car nous difons, *mon Dieu*, *votre Dieu*, *le Dieu d'Ifrael*, *le Dieu des Dieux*, & *le Seigneur des Seigneurs*, mais nous ne difons point, *mon Eternel*, *votre Eternel*, *l'Eternel d'Ifrael*, *l'Eternel des Dieux*; nous ne difons point, *mon infini*, ni *mon parfait*, parce que ces dénominations n'ont pas de relation à des êtres foumis. Le mot de Dieu fignifie quelquefois le Seigneur. * Mais tout Seigneur n'eft pas Dieu. La domination d'un Etre fpirituel eft ce qui conftitue *Dieu* : elle eft vraie dans le vrai Dieu, elle s'étend à tout dans le Dieu qui eft au-deffus de tout, & elle eft feulement fictice & imaginée dans les faux Dieux : il fuit de ceci que le vrai Dieu eft un Dieu vivant, intelligent, & puiffant; qu'il eft au-deffus de tout, & entierement parfait. Il eft éternel & infini, tout-puiffant, & *omni-fcient*, c'eft-à-dire, qu'il dure depuis l'éternité paffée & dans l'éternité à venir, & qu'il eft préfent partout l'efpace infini : il régit tout; & il connoît tout ce qui eft & tout ce qui peut être. Il n'eft pas l'éternité ni l'infinité, mais il eft éternel & infini; il n'eft pas la durée ni l'efpace, mais il dure & il eft préfent; il dure toujours & il eft préfent partout; il eft éxiftant toujours & en tout lieu, il conftitue l'efpace & la durée.

Comme chaque particule de l'efpace éxifte toujours, & que chaque moment indivifible de la durée dure partout, on ne peut pas dire que celui qui a fait toutes chofes & qui en eft le Seigneur

* *Pocock* fait dériver le mot *de Dieu* du mot arabe (*Du* & au génitif *Di*) qui fignifie *Seigneur*, & c'eft dans ce fens que les Princes font appellés *Dieux* (au Pfeaume 84. v. 6. & au 10. ch. de S. Jean, v. 45.) Moyfe eft appellé le Dieu de fon frere Aaron, & le Dieu du Roi Pharaon, (ch. 4. de l'Exod. v. 16. & ch. 7. v. 1.) & dans le même fens les ames des Princes morts étoient appellées *Dieux* autrefois par les Gentils, mais c'étoit à tort, car après leur mort ils n'avoient plus de domination.

n'eft

n'eſt *jamais* & *nulle-part*. Toute ame qui ſent en divers temps, par divers ſens, & par le mouvement de pluſieurs organes, eſt toujours une ſeule & même perſonne indiviſible.

Il y a des parties ſucceſſives dans la durée, & des parties co-exiſtantes dans l'eſpace: il n'y a rien de ſemblable dans ce qui conſtitue la perſonne de l'homme ou dans ſon principe penſant; & bien moins y en aura-t'il dans la ſubſtance penſante de Dieu. Tout homme, en tant qu'il eſt un Etre ſentant, eſt un ſeul & même homme pendant toute ſa vie & dans tous les divers organes de ſes ſens. Ainſi Dieu eſt un ſeul & même Dieu partout & toujours. Il eſt préſent partout, non ſeulement *virtuellement*, mais *ſubſtantiellement*, car on ne peut agir où l'on n'eſt pas. Tout eſt mû & * contenu dans lui, mais ſans aucune action des autres êtres ſur lui. Car Dieu n'éprouve rien par le mouvement des corps: & ſa toute-préſence ne leur fait ſentir aucune réſiſtance, il eſt évident que le Dieu ſuprême éxiſte néceſſairement: & par la même néceſſité il éxiſte partout & toujours. D'où il ſuit auſſi qu'il eſt tout ſemblable à lui-même, tout œil, tout oreille, tout cerveau, tout bras, tout ſenſation, tout intelligence, & tout action: d'une façon nullement humaine, encore moins corporelle, & entiérement inconnue. Car de même qu'un aveugle n'a pas d'idée des couleurs, ainſi nous n'avons point d'idées de la maniére dont l'Etre ſupréme ſent & connoît toutes choſes. Il n'a point de corps ni de forme corporelle, ainſi il ne peut être ni vû, ni touché, ni en-

* Les anciens penſoient ainſi, comme il paroît par la maniére dont s'exprime *Pythagore*, dans le livre de la Nature des Dieux de *Ciceron*, liv. 1. ainſi que *Thalés* & *Anaxagore*; *Virgile* dans les Georgiques, liv. 4. v. 220 & dans le 6 liv. de l'Eneide v.721. *Philon* au commencement du liv. 1. de l'Allégorie. *Aratus* dans ſes phénoménes. Il en eſt de même des Auteurs ſacrés, S. *Paul*, Actes des Apôtr. ch. 17. v. 27. & 28. S. *Jean* dans ſon Evangile, ch. 14. v. 2. *Moyſe* dans le Deuteronome, ch. 4. v. 39 & ch. 10. v. 14. *David* dans le Pſeaume 139. v. 7. 8 & 9. *Salomon* au 1. liv. des Rois, ch. 8. v. 27. *Job*, ch. 22. v. 12. 13 & 14. *Jérémie*, ch. 23. v. 23 & 24. Les Payens s'imaginoient que le Soleil, la Lune, les aſtres, les ames des hommes & toutes les autres parties du monde étoient des parties de l'être ſupréme & qu'on leur devoit un culte, mais c'étoit une erreur.

tendu, & on ne doit l'adorer ſous aucune forme ſenſible. Nous avons des idées de ſes attributs, mais nous n'en avons aucune de ſa ſubſtance. Nous voyons les figures & les couleurs des corps, nous entendons leurs ſons, nous touchons leurs ſuperficies extérieures, nous ſentons leurs odeurs, nous goûtons leurs ſaveurs : mais quant aux ſubſtances intimes, nous ne les connoiſſons par aucun ſens, ni par aucune réflexion; & nous avons encore beaucoup moins d'idée de la ſubſtance de Dieu. Nous le connoiſſons ſeulement par ſes propriétés & ſes attributs, par la ſtructure très-ſage & très-excellente des choſes, & par leurs cauſes finales; nous l'admirons à cauſe de ſes perfections; nous le révérons & nous l'adorons à cauſe de ſon empire; nous l'adorons comme ſoumis, car un Dieu ſans providence, ſans empire & ſans cauſes finales, n'eſt autre choſe que le deſtin & la nature; la néceſſité métaphyſique, qui eſt toujours & partout la même, ne peut produire aucune diverſité; la diverſité qui régne en tout, quant au tems & aux lieux, ne peut venir que de la volonté & de la ſageſſe d'un Etre qui éxiſte néceſſairement.

On dit allégoriquement que Dieu voit, entend, parle, qu'il ſe réjouit, qu'il eſt en colere, qu'il aime, qu'il hait, qu'il deſire, qu'il conſtruit, qu'il bâtit, qu'il fabrique, qu'il accepte, qu'il donne, parce que tout ce qu'on dit de Dieu eſt pris de quelque comparaiſon avec les choſes humaines; mais ces comparaiſons, quoiqu'elles ſoient très-imparfaites, en donnent cependant quelque foible idée. Voilà ce que j'avois à dire de Dieu, dont il appartient à la philoſophie naturelle d'examiner les ouvrages.

J'ai expliqué juſqu'ici les phénoménes céleſtes & ceux de la mer par la force de la gravitation, mais je n'ai aſſigné nulle part la cauſe de cette gravitation. Cette force vient de quelque cauſe qui pénétre juſqu'au centre du Soleil & des planétes, ſans rien perdre de ſon activité; elle n'agit point ſelon la grandeur des ſuperficies, (comme les cauſes méchaniques) mais ſelon la quantité de la matiere; & ſon action s'étend de toutes parts à des diſ-

tances immenfes, en décroiffant toujours dans la raifon doublée des diftances.

La gravité vers le Soleil eft compofée des gravités vers chacune de fes particules, & elle décroît éxactement, en s'éloignant du Soleil, en raifon doublée des diftances, & cela jufqu'à l'orbe de Saturne, comme le repos des aphélies des planétes le prouve, & elle s'étend jufqu'aux dernieres aphélies des cométes, fi ces aphélies font en repos.

Je n'ai pû encore parvenir à déduire des phénomenes la raifon de ces propriétés de la gravité, & je n'imagine point d'hypothèfes. Car tout ce qui ne fe déduit point des phénomenes eft une hypothèfe: & les hypothèfes, foit métaphyfiques, foit phyfiques, foit mécaniques, foit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philofophie expérimentale.

Dans cette philofophie, on tire les propofitions des phénomenes, & on les rend enfuite génerales par induction. C'eft ainfi que l'impénétrabilité, la mobilité, la force des corps, les loix du mouvement, & celles de la gravité ont été connues. Et il fuffit que la gravité éxifte, qu'elle agiffe felon les loix que nous avons expofées, & qu'elle puiffe expliquer tous les mouvemens des corps céleftes & ceux de la mer.

Ce feroit ici le lieu d'ajouter quelque chofe fur cette efpéce d'efprit très fubtil qui pénétre à travers tous les corps folides, & qui eft caché dans leur fubftance; c'eft par la force, & l'action de cet efprit que les particules des corps s'attirent mutuellement aux plus petites diftances, & qu'elles cohérent lorfqu'elles font contigues; c'eft par lui que les corps électriques agiffent à de plus grandes diftances, tant pour attirer que pour repouffer les corpufcules voifins: & c'eft encore par le moyen de cet efprit que la lumiére émane, fe réfléchit, s'infléchit, fe réfracte, & échauffe les corps; toutes les fenfations font excitées, & les membres des animaux font mûs, quand leur volonté l'ordonne, par les vibrations

DU SYSTEME DU MONDE.

de cette substance spiritueuse qui se propage des organes extérieurs des sens, par les filets solides des nerfs, jusqu'au cerveau, & ensuite du cerveau dans les muscles. Mais ces choses ne peuvent s'expliquer en peu de mots; & on n'a pas fait encore un nombre suffisant d'expériences pour pouvoir déterminer exactement les loix selon lesquelles agit cet esprit universel.



EXPOSITION

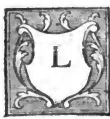


EXPOSITION ABREGÉE DU SYSTÊME DU MONDE,

ET EXPLICATION DES PRINCIPAUX *Phénomenes astronomiques tirée des Principes de M. Newton.*

INTRODUCTION.

I.



LES Philosophes ont commencé par avoir sur l'Astronomie, comme sur le reste, les mêmes idées que le peuple, mais ils les ont rectifiées ; ainsi on a commencé par croire que la terre étoit platte, & qu'elle étoit le centre autour duquel tournoient tous les corps célestes. Premieres idées des Philosophes sur l'Astronomie.

I I.

Les *Babyloniens*, & ensuite *Pithagore* & ses Disciples, ayant Découvertes de

Babyloniens & de Pithagore.

& examiné ces idées des sens, reconnurent que la terre est ronde, & regarderent le Soleil comme le centre de l'univers (*a*).

III.

On doit être surpris que le véritable systême du monde ayant été découvert, l'hypothèse dans laquelle on suppose que la terre est le centre des mouvemens célestes ait prévalu; car bien que cette hypothèse s'accorde avec les apparences, & qu'elle semble d'abord d'une extrême simplicité, il s'en faut beaucoup qu'il soit aisé d'y rendre compte des mouvemens célestes : aussi *Ptolomée*, & ceux qui depuis lui ont voulu soutenir cette opinion du repos de la terre, ont-ils été obligés d'embarrasser les cieux de différens Epycicles, & d'une quantité innombrable de cercles très-difficiles a concevoir & à employer, car il n'y a rien de si difficile que de mettre l'erreur à la place de la vérité.

Efforts qu'on a faits pour soutenir le repos de la terre.

Systême de *Ptolomée.*

Il y a grande apparence que l'autorité d'*Aristote* qui étoit presque la seule régle de vérité du tems de *Ptolomée*, est ce qui a entraîné ce grand Astronome dans l'erreur; mais comment *Aristote* n'a-t'il pas lui même suivi le véritable systême qu'il connoissoit puisqu'il l'a combattu ? cette réflexion n'est pas à l'honneur de l'esprit humain; quoi qu'il en soit jusqu'à *Copernic* on a cru la terre en repos & le centre des mouvemens célestes.

IV.

Copernic a renouvellé l'ancien systême de Pithagore sur le mouvement de la terre.

Ce grand homme renouvella l'ancien systême des *Babyloniens* & de *Pithagore*, & l'appuya de tant de raisons & de découvertes, que l'erreur ne put plus prévaloir; ainsi le Soleil fut remis par *Copernic* dans le centre du monde, ou, pour m'expliquer plus exactement, dans le centre de notre systême planétaire.

(*a*) M. *Newton* dans le Livre *De Systemate mundi*, attribue aussi cette opinion à *Numa Pompilius*, & il dit (pag. 1.) que c'étoit pour représenter le Soleil dans le centre des orbes célestes, que *Numa* avoit fait bâtir un Temple rond en l'honneur de *Vesta*, Déesse du Feu, dans le milieu duquel on conservoit un feu perpétuel.

V.

Quoique les Phénomenes céleſtes s'expliquent avec une extrême facilité dans le ſyſtême de *Copernic*, quoique les obſervations & le raiſonnement lui ſoient également favorables, il s'eſt trouvé de ſon tems un Aſtronome très-habile, qui a voulu ſe refuſer à l'évidence de ſes découvertes : *Ticho*, trompé par une expérience mal faite (*b*), & peut-être encore plus par l'envie de faire un ſyſtême, en compoſa un qui tient le milieu entre celui de *Ptolomée* & celui de *Copernic* ; il ſuppoſa la terre en repos, & que les autres planetes qui tournent autour du Soleil tournoient avec lui autour de la terre en vingt-quatre heures, ce qui laiſſe ſubſiſter une des plus grandes difficultés du ſyſtême de *Ptolomée*, celle que l'on tire de l'exceſſive rapidité du mouvement du premier mobile, & prouve ſeulement combien il eſt dangereux d'abuſer de ſes lumiéres. Syſtême de *Ticho-Brahé*.

Si *Tycho* s'eſt égaré dans la maniére dont il faiſoit mouvoir les corps céleſtes, il a rendu de grands ſervices à l'Aſtronomie par l'exactitude & la longue ſuite de ſes obſervations. Il a déterminé l'oppoſition d'un très-grand nombre d'étoiles avec une exactitude inconnue avant lui ; il a découvert la réfraction de l'air qui a tant de part aux Phénomenes aſtronomiques ; il a prouvé le premier par la parallaxe des cométes qu'elles remontent beaucoup au-deſſus de la Lune ; c'eſt lui qui a découvert ce qu'on appelle *la variation de la Lune* ; & c'eſt enfin de ſes obſervations ſur le cours des planetes, que *Kepler*, avec qui il vint paſſer les dernieres années de ſa vie près de *Prague*, a tiré ſon admirable théorie des mouvemens des corps céleſtes. Services que *Ticho* a rendus à l'Aſtronomie.

(*b*) On objectoit à *Copernic* que le mouvement de la terre devoit produire des effets qui n'avoient pas lieu ; que par éxemple, ſi la terre ſe meut, une pierre jettée du haut d'une tour ne devoit pas retomber au pied de cette tour, parce que la terre a marché pendant le tems que la pierre a mis à tomber, & que cependant elle retombe au pied de la tour. *Copernic* répondoit que la terre eſt dans le même cas, par rapport aux corps qui tombent à ſa ſurface, qu'un vaiſſeau qui marche par rapport aux choſes qu'on y feroit tomber, & il aſſuroit qu'une pierre jettée du haut du mât d'un vaiſſeau qui marche, retomberoit au pied de ce mât. Cette expérience qui eſt hors de doute à préſent, fut mal faite alors, & fut la cauſe ou le prétexte qui empêcha *Ticho* de ſe rendre aux découvertes de *Copernic*.

VI.

Combien il restoit encore de choses à découvrir après *Copernic.*

Copernic avoit rendu sans doute un grand service à l'Astronomie & à la raison, en rétablissant le véritable Système du monde, & c'étoit déja beaucoup que la vanité humaine se fût résolue à mettre la terre au nombre des simples planetes ; mais il restoit bien des choses à découvrir : on ne connoissoit encore ni la courbe que les planetes décrivent en tournant dans leur orbite, ni les loix qui dirigent leur cours, & c'est à *Kepler* à qui l'on doit ces importantes découvertes.

Découvertes de *Kepler.*
1. ellipticité des orbites.
La proportionalité des aires & des tems.

Ce grand Astronome trouva que les Astronomes qui l'avoient précédé s'étoient trompés en supposant que les orbes des planetes étoient circulaires, & il découvrit, en faisant usage des observations de *Ticho*, que les planetes se meuvent dans des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers, & qu'elles parcourent les différentes parties de leur orbite avec des vitesses différentes ; ensorte que l'aire décrite par une planete, c'est-à-dire, l'espace renfermé entre les lignes tirées du Soleil à deux lieux quelconques de la planete, est toujours proportionnelle au tems.

La relation qui est entre les tems périodiques & les distances.

Quelques années après, en comparant le tems des révolutions des différentes planetes autour du Soleil avec leur différent éloignement de cet astre, il trouva que les planetes qui sont placées plus loin du Soleil se meuvent plus lentement dans leur orbe ; & en cherchant si cette proportion est celle de leur distance, il trouva enfin en 1618. après plusieurs tentatives, que les tems de leurs révolutions sont comme la racine quarrée du cube de leurs moyennes distances au Soleil.

VII.

Kepler a non-seulement trouvé ces deux loix qui ont retenu son nom & qui dirigent toutes les planetes dans leur cours, & la courbe qu'elles décrivent, mais il avoit entrevu la force qui la leur fait décrire ; on trouve les semences du pouvoir attractif dans la Préface

de ſon Commentaire ſur la planete de Mars, & il va même juſqu'à dire que le flux eſt l'effet de la gravité de l'eau vers la Lune ; mais il n'a pas tiré de ce principe ce qu'on auroit dû croire qu'un auſſi grand homme que lui en auroit tiré, car il donne enſuite dans ſon Epitome d'Aſtronomie (*c*) une raiſon phyſique du mouvement des planetes tirée de principes tous différens ; & dans ce même Livre de la planete de Mars, il ſuppoſe dans les planetes un côté ami & un côté ennemi ; & à l'occaſion de leurs aphélies & de leurs périhélies, il dit, que le Soleil attire l'un de ces côtés, & qu'il repouſſe l'autre.

VIII.

On trouve l'attraction des corps céleſtes bien plus clairement encore dans un Livre de *Hook* ſur le mouvement de la terre, imprimé en 1674. c'eſt-à-dire, douze ans avant les principes. *Voici la traduction de ſes paroles*, pag. 27. » Alors j'expliquerai » un ſyſtême du monde qui différe à pluſieurs égards de tous les au- » tres, & qui répond en tout aux régles ordinaires de la mécha- » nique, il eſt fondé ſur ces trois ſuppoſitions.

» 1°. Que tous les corps céleſtes, ſans en excepter aucun, ont » une attraction ou gravitation vers leur propre centre, par laquelle, non-ſeulement ils attirent leurs propres parties & les em- » pêchent de s'écarter, comme nous le voyons de la terre, mais » encore ils attirent tous les autres corps céleſtes qui ſont dans la » ſphére de leur activité ; que parconſéquent, non-ſeulement le » Soleil & la Lune ont une influence ſur le corps & le mouvement » de la terre, & la terre une influence ſur le Soleil & la Lune, » mais auſſi que Mercure, Venus, Mars, Jupiter & Saturne ont » par leur force attractive une influence conſidérable ſur le mou- » vement de la terre, comme auſſi l'attraction réciproque de la » terre a une influence conſidérable ſur le mouvement de ces » planetes.

Anecdote ſinguliere ſur l'attraction.

(*c*) V. Greg. Liv. 1. Prop. 69.

» 2°. Que tous les corps qui ont reçu un mouvement simple & » direct continuent à se mouvoir en ligne droite, jusqu'à ce que par » quelqu'autre force effective ils en soient détournés & forcés à » décrire un cercle, une ellipse ou quelqu'autre courbe plus com- » posée.

» 3°. Que les forces attractives sont d'autant plus puissantes dans » leurs opérations, que le corps sur lequel elles agissent est plus » près de leur centre.

» Pour ce qui est de la proportion suivant laquelle ces forces dimi- » nuent à mesure que la distance augmente, j'avoue que je ne l'ai » pas encore vérifiée par des expériences, mais c'est une idée, qui » étant suivie comme elle mérite de l'être, sera très-utile aux Astro- » nomes pour réduire tous les mouvemens célestes à une régle » certaine, & je doute qu'on puisse jamais la trouver sans cela. » Celui qui entend la nature du pendule circulaire & du mouve- » ment circulaire, comprendra aisément le fondement de ce prin- » cipe, & sçaura trouver les directions dans la nature pour l'éta- » blir exactement : je donne ici cette ouverture à ceux qui ont le » loisir & la capacité de cette recherche, &c. »

IX.

Il ne faut pas croire que cette idée jettée au hazard dans le Livre de *Hook* diminue la gloire de M. *Newton*, qui a même eu l'attention d'en faire mention dans son Livre *De Sistemate mundi*. (*d*) L'exemple de *Hook* & celui de *Kepler* servent à faire voir quelle distance il y a entre une vérité entrevue & une vérité démontrée, & combien les plus grandes lumiéres de l'esprit servent peu dans les sciences, quand elles cessent d'être guidées par la Géométrie.

X.

Kepler qui a fait de si belles & de si importantes découvertes tant qu'il a suivi ce guide, fournit une des preuves les plus frap-

(*d*) Pag. 3. Edition de 1731.

pantes des égaremens où peuvent tomber les meilleurs esprits quand ils l'abandonnent pour se livrer au plaisir d'inventer des systêmes, Qui croiroit, par exemple, que ce grand homme eût pû donner dans les rêveries des Pithagoriciens sur les nombres ? cependant, il croyoit que les distances des planetes principales & leur nombre étoient relatifs aux cinq corps solides réguliers de la Géométrie (*e*), & qu'on pouvoit les inscrire entr'elles ; ensuite, ses observations lui ayant fait voir que les distances des planetes ne s'accordoient pas avec cette supposition, il imagina que les mouvemens célestes s'exécutoient dans des proportions qui répondoient à celles selon lesquelles on divise une corde, afin qu'elle donne les tons qui composent l'octave (*f*).

Etranges idées de *Kepler*.

Kepler ayant envoyé à *Ticho* une copie de l'ouvrage dans lequel il tachoit d'établir ces chiméres, *Ticho* lui répondit, qu'il (*g*) lui conseilloit de laisser là les spéculations tirées des premiers principes, & de s'appliquer plutôt à établir ses raisonnemens sur le fondement solide des observations.

Conseil trés-sage de *Ticho* à *Kepler*.

Le grand *Hughens* lui-même (*h*) croyoit que le quatriéme satellite de Saturne qui porte son nom, faisant avec notre Lune & les quatre de Jupiter le nombre de six planetes secondaires, le nombre des planetes étoit complet, & qu'il étoit inutile de chercher à en découvrir de nouvelles, parce que les planetes principales sont aussi au nombre de six, & que le nombre de six est appellé *parfait*, parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquottes, 1, 2 & 3.

Idée bizarre de *Hughens*.

X I.

C'est en ne s'écartant jamais de la Géométrie la plus profonde, que M. *Newton* a trouvé la proportion dans laquelle agit la gravité, & que le principe soupçonné par *Kepler* & par *Hook*, est devenu

(*e*) *Mysterium Cosmographicum.*
(*f*) *Mysterium Cosmographicum.*
(*g*) *Uti suspensis speculationibus à priori descendentibus animam potius ad observationes quas simul afferebat considerandas adjicerem.* (c'est *Kepler* qui parle) *Notæ in secundam editionem mysterii Cosmographici.*
(*h*) Dédicace de son systême de Saturne.

dans ses mains une source si féconde de vérités admirables & inespérées.

Une des choses qui avoit empêché *Kepler* de tirer du principe de l'attraction toutes les vérités qui en sont une suite, c'est l'ignorance où l'on étoit de son tems des véritables loix du mouvement. M. *Newton* a eu sur *Kepler* l'avantage de profiter des loix du mouvement établies par *Hughens*, & qu'il a poussé beaucoup plus loin que lui.

Avantage de *Newton* sur *Kepler*, de son tems les véritables loix du mouvement étoient mieux connues.

XII.

Analyse du Livre des Principes.

Le Livre des Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle dont on vient de voir la traduction, contient trois Livres outre les Définitions, les Loix du mouvement & leurs Corollaires; le premier Livre est composé de quatorze Sections, le second en contient neuf, & le troisiéme contient l'application des Propositions des deux premiers au Systême du monde.

XIII.

Définitions.

Le Livre des Principes commence par huit Définitions; M. *Newton* fait voir dans les deux premieres comment on doit mesurer *la quantité de la matiere, & la quantité du mouvement*; il définit dans la troisiéme *la force d'inertie* ou force résistante dont toute matiere est douée; il fait voir dans la quatriéme ce qu'on doit entendre par *force active*; il définit dans la cinquiéme *la force centripéte*; & il donne dans les sixiéme, septiéme & huitiéme, la maniere de mesurer *sa quantité absolue, sa quantité motrice, & sa quantité accélératrice.* Ensuite il établit les trois Loix de mouvement suivantes.

XIV.

Loix du mouvement.

1°. Que tout corps persévere de lui-même dans son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.

2°. Que le changement qui arrive dans le mouvement est toujours proportionnel à la force motrice, & se fait dans la direction de cette force.

3°. Que

3°. Que l'action & la réaction sont toujours égales & contraires.

X V.

Après avoir expliqué ces loix & en avoir tiré plusieurs Corollaires, M. *Newton* commence son premier Livre par onze Lemmes qui en font la premiere Section ; il expose dans ces onze Lemmes sa méthode *des premieres & dernieres raisons :* Cette méthode est le fondement de la Géométrie de l'infini, & avec son secours on donne à cette Géométrie toute la certitude de l'ancienne.

Premier Livre.

La premiere Section contient les principes de la Géométrie de l'infini.

Les treize autres Sections du premier Livre des Principes, sont employées à démontrer des Propositions générales sur le mouvement des corps, sans avoir égard, ni à l'espéce de ces corps, ni au milieu dans lequel ils se meuvent.

Et les treize autres des propositions générales sur le mouvement des corps.

C'est dans ce premier Livre que M. *Newton* donne toute sa théorie de la gravitation des astres, mais il ne s'y est pas borné à examiner les questions qui y sont applicables ; il a rendu ses solutions générales, & il a donné un grand nombre d'applications de ces solutions.

X V I.

Dans le second Livre M. *Newton* considére le mouvement des différens corps dans des milieux résistans.

Deuxiéme Livre.

Ce second Livre, qui contient une théorie très-profonde des fluides & des mouvemens des corps qui y sont plongés, paroît avoir été destiné à détruire le systême des tourbillons, quoique ce ne soit que dans le scholie de la derniere Proposition, que M. *Newton* combat ouvertement *Descartes*; & qu'il fait voir que les mouvemens célestes ne peuvent s'exécuter par ses tourbillons.

Il traite du mouvement des corps dans des milieux résistans.

M. *Newton* a composé ce Livre pour détruire les tourbillons de *Descartes*.

X V I I.

Enfin le troisiéme Livre des Principes traite du Systême du monde ; M. *Newton* applique dans ce Livre les Propositions du premier à l'explication des Phénomenes célestes : c'est dans cette application

Troisiéme Livre.

Il traite du Systême du monde.

que je vais tâcher de ſuivre M. *Newton*, & de faire voir l'enchaînement de ſes Principes, & avec quelle facilité ils expliquent les Phénomenes aſtronomiques.

XVIII.

Ce qu'on entend dans ce Traité par le mot d'*attraction*.

Au reſte, je déclare ici, comme M. *Newton* a fait lui-même, qu'en me ſervant du mot d'*attraction*, je n'entends que la force qui fait tendre les corps vers un centre, ſans prétendre aſſigner la cauſe de cette tendance.

CHAPITRE PREMIER.

Principaux Phénomenes du Syſtême du Monde.

I.

Il ne ſera pas inutile avant de rendre compte de la maniere dont la théorie de M. *Newton* explique les Phénomenes céleſtes, de donner une idée abrégée de notre ſyſtême planétaire.

Il entrera néceſſairement dans cette expoſition des vérités découvertes par M. *Newton*, mais on remettra aux Chapitres ſuivans à faire voir comment il eſt parvenu à les découvrir ; celui-ci ne contiendra que l'expoſition des Phénomenes mêmes.

II.

Premiere diviſion des corps céleſtes de notre ſyſtême planétaire en *planetes principales* & en *planetes ſecondaires*.

Les corps céleſtes qui compoſent notre ſyſtême planétaire, ſe diviſent en *planetes principales*, c'eſt-à-dire, qui ont le Soleil pour centre de leur mouvement, & en *planetes ſecondaires*, qu'on appelle *ſatellites* : ces dernieres planetes tournent autour de la planete principale qui leur ſert de centre.

Il y a ſix planetes principales, dont les caractéres & les noms ſont

Noms & caractéres des planetes principales.

☿ *Mercure*,
♀ *Vénus*,
♁ *La Terre*,
♂ *Mars*,
♃ *Jupiter*,
♄ *Saturne*;

On a ſuivi dans cette énumération des planetes principales, l'ordre de leurs diſtances au Soleil, en commençant par celles qui en ſont le plus près.

Quelles ſont les planetes qui ont des ſatellites.

Enumération générale des corps céleſtes qui compoſent notre ſyſtéme planétaire.

La Terre, Jupiter & Saturne, ſont les ſeules planetes auſquelles nous découvrions des ſatellites : la terre n'en a qu'un qui eſt la Lune, Jupiter en a quatre, & Saturne cinq outre ſon anneau, ce qui compoſe notre ſyſtéme planétaire de dix-huit corps céleſtes, en comptant le Soleil, & l'anneau de Saturne.

I I I.

Deuxiéme diviſion des planetes en *planetes ſupérieures* & *planetes inférieures*.

Quelles ſont les planetes inférieures & quel eſt leur arrangement.

Les planetes principales ſe diviſent en *planetes ſupérieures* & *planetes inférieures* : on appelle planetes inférieures celles qui ſont plus près du Soleil que la terre; ces planetes ſont *Mercure* & *Vénus*; l'orbe (*a*) de Vénus renferme l'orbe de Mercure & le Soleil, & l'orbe de la terre eſt extérieur à ceux de Mercure & de Vénus, & les renferme ainſi que le Soleil.

Comment on a découvert cet arrangement.

On connoît cet arrangement parce que Vénus & Mercure nous paroiſſent quelquefois entre le Soleil & nous, ce qui ne pourroit pas arriver ſi ces deux planetes n'étoient pas plus près du Soleil que la terre; & l'on voit ſenſiblement que Vénus s'éloigne plus du Soleil que Mercure, & que ſon orbite renferme par conſéquent celle de Mercure.

Quelles ſont

Les planetes ſupérieures ſont celles qui ſont plus éloignées du

(*a*) On appelle *orbe*, ou orbite, la courbe qu'une planete décrit en tournant autour du corps qui lui ſert de centre.

les planetes supérieures, & quel eſt leur arrangement.

Soleil que la terre, elles ſont au nombre de trois, *Mars*, *Jupiter* & *Saturne*.

On connoît que les orbites de ces planetes renferment celle de la terre, parce que la terre ſe trouve quelquefois entre le Soleil & elles.

Comment on l'a découvert.

L'orbe de Mars renferme celui de la terre, l'orbe de Jupiter celui de Mars, & l'orbe de Saturne celui de Jupiter; ainſi des trois planetes ſupérieures, Saturne eſt celle qui eſt le plus loin de la terre, & Mars en eſt le plus près.

On connoît cet arrangement, parce que les planetes qui ſont le plus près de la terre, nous (*b*) cachent quelquefois celles qui en ſont plus éloignées.

IV.

Les planetes ſont des corps opaques.

Comment on s'en eſt apperçu.

Toutes les planetes ſont des corps opaques; on eſt aſſuré de l'opacité de Vénus & de Mercure, parce que, lorſque ces planetes paſſent entre le Soleil & nous, elles paroiſſent ſur cet aſtre comme de petites taches noires, & qu'elles ont ce qu'on appelle *des phaſes*, c'eſt-à-dire, que la quantité de leur illumination dépend de leur poſition par rapport au Soleil & à nous.

La même raiſon nous fait juger de l'opacité de Mars, qui a auſſi *des phaſes*, & on juge de l'opacité de Jupiter & de Saturne, parce que leurs ſatellites ne nous paroiſſent point éclairés par ces planetes lorſqu'elles ſont entre le Soleil & ces ſatellites, ce qui prouve que l'hémiſphère de ces planetes qui n'eſt pas éclairé du Soleil, eſt opaque.

V.

Les planetes ſont ſphériques.

Comment on l'a découvert.

Enfin on connoît que les planetes ſont des corps ſphériques, parce que, de quelque maniere qu'elles ſoient placées par rapport à nous, leur ſurface nous paroît toujours terminée par une courbe.

On juge que la terre eſt ſphérique, parce que dans les éclipſes ſon ombre paroit toujours terminée pour une courbe; que ſur la

(*b*) *Volf*, Elémens d'Aſtronomie.

mer on voit difparoître petit à petit un vaiffeau qui s'éloigne, enforte qu'on commence par perdre de vûe le corps du vaiffeau, puis fes voiles, puis enfin fes mats; & que de plus, on ne trouve point le bord de la fuperficie quoique plufieurs navigateurs en ayent fait le tour, & c'eft cependant ce qui devroit arriver fi la terre étoit plane.

V I.

Tout ce que nous connoiffons des planetes principales nous prouve donc que ce font des corps fphériques, opaques & folides.

Tous les corps de notre fyftême planétaire paroiffent être du même genre, fi on en excepte le Soleil.

Le Soleil paroît être d'une nature entierement différente des planetes; nous ne fçavons pas s'il eft compofé de parties folides ou fluides, nous fçavons feulement que fes parties brillent, qu'elles échauffent, & qu'elles brûlent quand elles font raffemblées dans une quantité fuffifante; ainfi toutes les vraifemblances portent à croire que le Soleil eft un corps de feu à peu près femblable au feu d'ici-bas, puifque fes rayons produifent les mêmes effets.

Il eft vraifemblable que la fubftance du Soleil eft du feu.

V I I.

Dans quelle courbe les corps céleftes tournent autour du Soleil.

Tous les corps céleftes font leurs révolutions autour du Soleil dans des ellipfes (*c*) plus ou moins alongées dont le Soleil occupe un des foyers; ainfi les planetes, en tournant autour du Soleil, font tantôt plus près, & tantôt plus loin de lui; la ligne qui paffe par le Soleil, & qui fe termine aux deux points de la plus grande proximité & du plus grand éloignement des planetes au Soleil, s'appelle *la ligne des apfides*, le point de l'orbite le plus éloigné du Soleil s'appelle l'*aphélie* de la planete, & le point qui en eft le plus près s'appelle *fon périhélie*.

Ce que c'eft que *la ligne des apfides*, *l'aphélie* & *le périhélie*.

Les planetes principales emportent avec elles dans leur révolution autour du Soleil, les fatellites dont elles font le centre.

(*c*) Efpéce de courbe qui eft la même qu'on appelle dans le langage ordinaire une *ovale*; les foyers font les deux points dans lefquels les Jardiniers placent leurs piquets pour tracer cette efpéce de figure, dont ils fe fervent fouvent.

En quel sens les planetes tournent autour du Soleil.

Cette révolution des planetes autour du Soleil, se fait d'Occident en Orient. (*d*)

Des cométes.

Il paroît de tems en tems des astres qui se meuvent en tout sens, & avec une extrême rapidité quand ils sont assez près de nous pour être visibles, ce sont les cometes.

Les cométes sont des planetes.

On n'a pas encore assez d'observations pour connoître le nombre des cométes, on sçait seulement, & il n'y a pas longtems qu'on n'en doute plus, que ce sont des planetes qui tournent autour du Soleil comme les autres corps de notre monde planétaire, & qu'elles décrivent des ellipses si alongées, qu'elles ne sont visibles pour nous que dans une très-petite partie de leur orbite.

VIII.

Toutes les planetes & les cométes observent les loix de *Kepler*.

Toutes les planetes observent, en tournant autour du Soleil, les deux loix de *Kepler*, dont on a parlé dans l'Introduction.

On sçait que les cométes observent la premiere de ces loix, je veux dire, celle qui fait décrire aux corps célestes (*e*) des aires égales en tems égaux ; & on verra dans la suite qu'il est vraisemblable, par les observations qu'on a pû faire jusqu'à présent, que les cométes observent aussi la seconde de ces loix, c'est-à-dire, celle des tems (*f*) périodiques en raison sesquiplée des distances.

(*d*) On suppose dans tout ce qu'on dit ici, le spectateur placé sur la terre.

(*e*) Le mot *aire* en général veut dire une superficie, ici il signifie l'*espace renfermé entre deux lignes tirées du centre à deux points où se trouve la planete* ; ces aires sont proportionnelles au tems, c'est-à-dire, qu'elles sont d'autant plus grandes ou plus petites, que les tems dans lesquels elles sont décrites sont plus longs ou plus courts.

(*f*) Le tems périodique est le tems qu'une planete employe à faire sa révolution dans son orbe.

Il est, je crois, plus à propos de donner un éxemple de la raison sesquiplée qu'une définition, supposé donc que la distance moyenne de Mercure au Soleil soit 4, celle de Vénus 9, que le tems périodique de Mercure soit de 40 jours, & qu'on cherche le tems périodique de Vénus, on cube les 2 premiers nombres 4 & 9, & on a 64 & 729; on tire ensuite la racine quarrée de ces 2 nombres, & il vient 8 pour celle du premier, & 27 pour celle du second; on fait ensuite cette régle de trois 8 : 27 :: 40 : 135, c'est-à dire, que la racine quarrée du cube de la moyenne distance de Mercure au Soleil est à la racine quarrée du cube de la moyenne distance de Vénus au Soleil, comme le tems périodique de Mercure autour du Soleil est au tems périodique cherché de Vénus autour du Soleil qui se trouve être 135 dans les suppositions qu'on a faites, & c'est-là ce qui s'appelle *la raison sesquiplée*.

IX.

En admettant ces deux loix de *Kepler* que toutes les obſervations ont confirmées, elles fourniſſent des argumens très-forts pour prouver le mouvement de la terre qu'on s'eſt obſtiné ſi long-tems à diſputer ; car, en prenant la terre pour le centre des mouvemens céleſtes, ces deux loix ne ſont point obſervées ; les planetes ne décrivent point des aires proportionnelles au tems autour de la terre, & les tems des révolutions du Soleil & de la Lune, par exemple, autour de cette planete, ne ſont point comme la racine quarrée du cube de leur moyenne diſtance à la terre ; car le tems périodique du Soleil autour de la terre étant environ 13 fois plus grand que celui de la Lune, ſa diſtance à la terre devroit être, ſuivant la régle de *Kepler*, entre 5 & 6 fois plus grande que celle de la Lune ; or, on ſçait que cette diſtance eſt environ 400 fois plus grande, donc, ſi l'on admet les loix de *Kepler*, la terre n'eſt pas le centre des révolutions céleſtes.

Preuves du mouvement de la terre.

De plus, la force (*g*) centripete que M. *Newton* a fait voir être la cauſe de la révolution des planetes, rend la courbe qu'elles décrivent autour de leur centre concave (*h*) vers lui, puiſque ſon effet eſt de les retirer de la tangente (*i*) ; or, l'orbe de Mercure & de Vénus ſont, dans quelqu'unes de leurs parties, convexes à la terre, donc les planetes inférieures ne tournent pas autour de la terre.

Il eſt aiſé de prouver la même choſe des planetes ſupérieures, car ces planetes nous paroiſſent tantôt (*k*) *directes*, tantôt *ſtation-*

(*g*) Le mot *de force centripete* porte ſa définition avec lui, car il ne veut dire autre choſe, que la force qui fait tendre un corps à un centre.

(*h*) Les deux cotés du verre d'une montre peuvent ſervir à faire entendre ces mots *concave* & *convexe ;* le côté extérieur à la montre eſt *convexe*, & celui qui eſt du côté du cadran eſt *concave*.

(*i*) La tangente eſt la ligne qui touche une courbe, & qui ne peut jamais la couper.

(*k*) On dit qu'une planete eſt *directe* lorſqu'elle paroît aller ſelon l'ordre des ſignes, c'eſt-à-dire, *d'Aries* à *Taurus*, de *Taurus* à *Gemini*, &c. ce qu'on appelle encore *aller*

naires & tantôt *rétrogrades*, toutes inégalités apparentes qui n'auroient pas lieu pour nous, si la terre étoit le centre des révolutions céleſtes.

Car aucune de ces apparences n'auroit lieu pour un ſpectateur placé dans le Soleil, puiſqu'elles ne ſont qu'une ſuite du mouvement de la terre dans ſon orbe, combiné avec celui de ces planetes dans le leur.

Voilà pourquoi le Soleil & la Lune ſont les ſeuls corps céleſtes qui nous paroiſſent toujours directs ; car le Soleil ne parcourant point d'orbe, ſon mouvement ne peut ſe combiner avec celui de la terre, & la terre étant le centre des mouvemens de la Lune, elle doit toujours nous paroître directe comme toutes les planetes le paroîtroient à un ſpectateur placé dans le Soleil.

Objection que l'on faiſoit à *Copernik*, tirée de la planete de Vénus.

La planete de Vénus fourniſſoit une des objections que l'on faiſoit à *Copernic* contre ſon ſyſtême : Si Vénus, lui diſoit-on, tournoit autour du Soleil, on devroit lui voir des phaſes comme à la Lune.

Sa réponſe à cette objection.

Auſſi, diſoit *Copernic*, ſi vos yeux étoient aſſez bons pour diſtinguer ces phaſes, vous les verriez ; & peut-être les Aſtronomes trouveront-ils moyen quelque jour de les appercevoir.

Découverte qui a confirmé cette réponſe.

Galilée eſt le premier qui ait vérifié cette prédiction de *Copernic*, & chaque découverte qu'on a fait depuis lui ſur le cours des aſtres, l'a confirmé.

X.

Sous quel angle les plans des planetes ſe coupent.

Les plans (*l*) des orbites de toutes les planetes ſe coupent dans des lignes qui paſſent par le centre du Soleil, enſorte qu'un ſpectateur placé dans le centre du Soleil ſe trouveroit dans les plans de tous ces orbes.

en conſéquence, elle eſt *ſtationnaire* lorſqu'elle paroît répondre quelque tems aux mêmes points du Ciel ; & enfin elle eſt *rétrograde* lorſqu'elle paroît aller contre l'ordre des ſignes, ce qu'on appelle encore *aller en antécédence*, c'eſt-à-dire, de *Gemini* à *Taurus*, de *Taurus* à *Aries*, &c.

(*l*) Le plan de l'orbite d'une planéte eſt la ſurface dans laquelle elle eſt ſenſée ſe mouvoir.

La

La ligne dans laquelle le plan de chaque orbite coupe le plan de l'écliptique, c'est-à dire, le plan dans lequel la terre se meut, s'appelle *la ligne* des nœuds, & les points de cette Section s'appellent *les nœuds* de l'orbite.

Ce qu'on appelle les nœuds & la ligne des nœuds d'un orbite.

Tous ces plans sont inclinés au plan de l'écliptique, sous les angles suivans.

Inclinaison de ces plans à l'écliptique.

Le plan de l'orbe de Saturne fait avec le plan de l'écliptique un angle de 2° ½, celui de Jupiter est de 1° ⅓, celui de Mars est un peu moindre que 2°, celui de Vénus est un peu plus grand que 3° ⅓, & celui de Mercure, enfin, est 7° environ.

Ces propositions sont prises de *Gregori*, Liv. I. Prop. 3.

X I.

Les orbes des planetes principales étant des ellipses dont le Soleil occupe un foyer, tous ces orbes sont excentriques, & le sont plus ou moins selon la distance qui est entre leur centre & le point où le Soleil se trouve placé.

On a mesuré l'excentricité de toutes ces orbites, & on a trouvé, que l'excentricité

Excentricité des planetes en demi diamétre de la terre.

de Saturne est de	54207 parties,
celle de Jupiter de	25058
celle de Mars de	14115
celle de la Terre de	4692
celle de Vénus de	500
& enfin celle de Mercure de	8149 parties,

en prenant le demi axe du grand orbe de la terre pour commune mesure, & en le supposant de 100000 parties.

En rapportant l'excentricité des planetes au demi diamétre de leur grand orbe, & en supposant ce demi diamétre de 100000 parties, les excentricités sont

Excentricité des planetes en demi diamétre de leur grand orbe.

celle de Saturne de	5683 parties,
celle de Jupiter de	4822
celle de Mars de	9263
celle de la Terre de	5700

celle de Vénus de	694
celle de Mercure de	21000 parties;

ainsi l'excentricité de Vénus est presqu'insensible.

XII.

Proportion du diamétre des différentes planetes.

Les planetes sont différentes en grosseur; on n'a le diamétre absolu que de la terre, parce que cette planete est la seule dont on ait pu mesurer la circonférence : mais on connoît le rapport qui est entre les diamétres des autres planetes, & en prenant celui du Soleil pour commune mesure, & le supposant de 1000 parties,

celui de Saturne en a	137
celui de Jupiter	181
celui de Mars	6
celui de la Terre	7
celui de Vénus	12
enfin celui de Mercure	4

d'où l'on voit que Mercure est la plus petite de toutes les planetes; car on sçait que les volumes des sphéres sont comme les cubes de leurs diamétres.

XIII.

Distances des planetes au Soleil.

Les planetes sont placées à différentes distances du Soleil. En prenant la distance de la terre au Soleil pour commune mesure, & en la supposant de 100000 parties, les six planetes principales se trouvent rangées autour du Soleil dans l'ordre suivant, lorsqu'elles en sont à leur moyenne distance,

Mercure en est à	38710
Vénus à	72333
La Terre à	100000
Mars à	152369
Jupiter à	520110
Saturne enfin à	953800.

On a calculé les diſtances moyennes du Soleil & des planetes à la terre, en demi diamétres de la terre ; voici celles qu'a donné M. *Caſſini*, le Soleil, Mercure & Vénus, en ſont à peu près également éloignés dans leur moyenne diſtance, qui eſt de 22000 demi diamétres de la terre, Mars en eſt à 33500, Jupiter à 115000, & Saturne à 210000. Diſtances des planetes à la terre.

X I V.

Les tems des révolutions des planetes autour du Soleil ſont d'autant plus courts, qu'elles en ſont plus près ; ainſi Mercure qui en eſt le plus près fait ſa révolution en 87 jours, Vénus qui eſt placée enſuite fait la ſienne en 224, la terre en 365, Mars en 686, Jupiter en 4332, & Saturne enfin qui eſt le plus éloigné du Soleil, employe 10759 jours à tourner autour de lui, tout cela en nombres rons. Tems périodiques des planetes autour du Soleil.

X V.

Outre leur mouvement de tranſlation autour du Soleil, les planetes ont encore un mouvement autour de leur axe qu'on appelle *leur révolution diurne*. Rotation des planetes.

On ne connoît la révolution diurne que du Soleil & de quatre planetes, qui ſont la Terre, Mars, Jupiter & Vénus ; ce ſont les taches qu'on a remarquées ſur leur diſque, (*m*) & qu'on a vu paroître & diſparoître ſucceſſivement, qui ont fait découvrir cette révolution ; Mars, Jupiter & Vénus ayant des taches ſur leur ſurface, on a appris par le retour des mêmes taches, & par leur diſparition ſucceſſive, que ces planetes tournent ſur elles-mêmes, & en quels tems ſe font les révolutions ; ainſi l'on a obſervé que Mars tourne en 23 h 20′, & Jupiter en 9 h 56′. Moyen employé pour la découvrir. Quelles ſont les planetes dont on connoît la rotation. Tems des rotations des planetes autour de leur axe.

Les Aſtronomes ne ſont pas d'accord ſur le tems de la révolution de Vénus autour de ſon axe, la plus grande partie croit qu'elle y tourne en 23 heures environ ; mais M. *Bianchini* qui a fait une Incertitudes ſur le tems de la rotation de Vénus.

(*m*) On appelle *diſque* d'une planete la partie de ſa ſurface qui eſt viſible pour nous.

étude toute particuliere des apparences de cette planete, croit sa révolution sur elle-même de 24 jours. Comme il fut obligé de transporter l'instrument avec lequel il observoit pendant l'observation même, à cause d'une maison qui lui cachoit Vénus, & que cette opération dura près d'une heure, on peut croire que pendant ce tems la tache qu'il observoit changea; quoi qu'il en soit, son autorité dans cette matiere mérite qu'on suspende son jugement jusqu'à ce qu'on ait de plus amples observations.

M. *Delahire* a observé avec un télescope de 16 pieds, des montagnes dans Vénus plus hautes que celles de la Lune.

On ne peut s'assûrer par l'observation de la rotation de Mercure ni de celle de Saturne, & pourquoi.

Mercure est trop plongé dans les rayons du Soleil pour que l'on puisse s'assûrer par l'observation s'il tourne sur lui-même; il en est de même de Saturne à cause de son grand éloignement.

M. *Cassini* a observé en 1715. avec un télescope de 118 p. trois bandes dans Saturne semblables à celles qu'on remarque dans Jupiter, mais apparemment qu'on n'a pu suivre cette observation avec assez d'éxactitude, pour en conclure la rotation de Saturne autour de son axe.

Mais l'analogie porte à croire que ces planetes tournent aussi sur leur axe.

Mercure & Saturne étant assujettis aux même loix qui dirigent le cours des autres corps célestes, & ces planetes, par-tout ce que nous en pouvons connoître, nous paroissant des corps de même genre qu'eux, l'analogie nous porte à conclure que ces deux planetes tournent sur leur centre comme les autres, & que peut-être un jour on parviendra à connoître cette révolution, & en combien de tems elle s'éxécute.

XVI.

Comment on a découvert la révolution du Soleil sur son axe.

Il paroît de tems en tems des taches sur le Soleil qui ont appris que cet astre tourne aussi sur lui-même.

Des taches du Soleil.

Il a fallu bien des observations après la découverte de ces taches, avant qu'on en ait pû observer d'assez durables pour en pouvoir conclure le tems de la révolution du Soleil sur son axe.

Keill rapporte dans sa cinquiéme Leçon d'Astronomie, qu'on en a observé qui employoient 13 jours ½ à aller du limbe occidental du Soleil à son limbe oriental, & qu'au bout de 13 autres jours ½ elles reparoissoient de nouveau à son bord occidental; d'où il conclut, que le Soleil tourne sur lui-même en 27 jours environ d'Occident en Orient, c'est-à-dire, dans le même sens que les planetes.

Par le moyen des mêmes taches, on a trouvé que l'axe de rotation du Soleil fait, avec le plan de l'écliptique, un angle d'environ 7 dégrés.

Le Pere *Jaquier* a fait dans son Commentaire une réflexion sur ces taches, qui mérite d'être rapportée. Voyant qu'aucune observation ne prouve l'égalité du tems de l'occultation, & qu'au contraire, par toutes les observations qu'il a parcourues, ces tems paroissent inégaux, & que le tems de l'occultation pendant lequel elles sont cachées, a toujours été plus long que celui pendant lequel elles sont visibles, il en a conclu (ainsi que M. *Volf*, art. 413 de son Astron.) que ces taches ne sont pas inhérentes au Soleil, mais qu'elles en sont à quelque intervalle.

Jean *Fabrice* (*n*) fut le premier qui découvrit ces taches (en Allemagne l'an 1611.) & qui en conclut la révolution diurne du Soleil; ensuite le Jésuite (*o*) *Scheiner* les observa, & donna aussi ses observations, & *Galilée* vers le même tems fit la même découverte en Italie.

Du tems de *Scheiner* on voyoit plus de 50 taches sur la surface du Soleil, d'où l'on peut assigner la cause d'un phénomene rapporté par quelques Historiens, que le Soleil avoit paru très pale quelquefois pendant un an entier; car il ne faut que des taches assez grandes, & qui subsistent assez longtems, pour causer ce phénomene.

On ne doute plus à présent que la terre ne tourne sur elle-

(*n*) *Volf Elementa Astron.* Cap. 1

(*o*) Ce Jésuite ayant été dire à son Supérieur qu'il avoit découvert des taches dans le Soleil, celui-ci lui répondit gravement *cela est impossible, j'ai lû deux ou trois fois Aristote, & je n'y ai rien trouvé de semblable.*

même en 23 h 56′, ce qui compose notre jour astronomique, & cause l'alternative de jours & de nuits dont tous les climats de la terre jouissent.

XVII.

L'effet du mouvement rotatoire des planetes est d'élever leur équateur.

Ce mouvement des corps célestes autour de leur centre altére leur forme, car on sçait que le mouvement circulaire fait acquérir aux corps qui tournent une force, qui est d'autant plus grande, le tems de leur révolution restant le même, que le cercle qu'ils décrivent est plus grand, & on appelle cette force, *force centrifuge*, c'est-à-dire, *qui éloigne du centre ;* donc les parties des planetes acquiérent par la rotation une force centrifuge d'autant plus grande, qu'elles sont plus près de l'équateur de ces planetes, puisque l'équateur est le grand cercle de la sphére, & d'autant moindre, qu'elles sont plus près des pôles ; (*p*) supposant donc que les corps célestes ayent été sphériques dans l'état de repos, leur rotation autour de leur axe a dû élever les régions de l'équateur, & abaisser celles des pôles, & changer par conséquent la forme sphérique en celle d'un sphéroïde aplati vers les pôles.

De la force centrifuge.

Quelles sont les planetes dans lesquelles on s'apperçoit de l'élévation de l'équateur.

Ainsi la théorie nous fait voir que toutes les planetes doivent être aplaties vers leurs pôles par leur rotation, mais cet aplatissement n'est sensible que dans Jupiter & dans notre globe. L'on verra dans la suite qu'on peut déterminer la quantité de cet aplatissement dans le Soleil par la théorie, mais qu'elle est trop peu considérable pour être sensible à l'observation.

Les mesures prises au cercle polaire, en France & à l'équateur, ont donné la proportion des axes (*q*) de la terre environ de 173 à 174.

(*p*) On appelle *pôles* les points autour desquels le corps révoluant tourne, & *équateur* le cercle paralléle à ces points, & qui partage la sphére révoluante en deux parties égales.

(*q*) On appelle *axe* ou *diamétre* en général toute ligne qui passe par le centre & se termine à la circonférence : dans le cas dont il s'agit, les axes sont deux lignes qui passent par le centre, & dont l'une se termine aux pôles & l'autre à l'équateur.

Les télescopes nous font appercevoir l'aplatiſſement de Jupiter, & cet aplatiſſement eſt beaucoup plus conſidérable que celui de la terre, parce que cette planete eſt beaucoup plus groſſe, & qu'elle tourne beaucoup plus rapidement ſur elle-même que la terre ; on juge que le rapport des axes de Jupiter eſt celui de 13 à 14.

XVIII.

Les obſervations font voir que la Terre, Mars, Jupiter, Vénus & le Soleil ont des atmoſpheres.

Les taches de Vénus, de Mars & de Jupiter étant variables & changeant ſouvent de forme, il eſt très-vraiſemblable que ces planetes ſont entourées comme la nôtre d'un atmoſphére, dont les altérations produiſent ces apparences.

A l'égard du Soleil comme ſes taches ne ſont pas inhérentes à ſon diſque, & qu'elles paroiſſent & diſparoiſſent très-ſouvent, on ne peut douter qu'il n'ait un atmoſphére qui l'entoure immédiatement, & dans lequel ces taches ſe forment & ſe diſſipent tour à tour.

XIX.

Tout ce qu'on vient d'expoſer étoit connu avant M. *Newton*, mais on ne croyoit pas avant lui qu'il fût poſſible de connoître la maſſe des planetes, leur denſité, & ce que peſeroit le même corps s'il étoit tranſporté ſucceſſivement à la ſurface des différentes planetes : on verra dans le Chapitre ſuivant, comment M. *Newton* eſt parvenu à ces étranges découvertes ; il ſuffit de dire ici, qu'il a trouvé que les maſſes du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre, c'eſt-à-dire les quantités de matiere qu'ils contiennent, ſont reſpectivement comme 1. $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ & $\frac{1}{169282}$ en ſuppoſant (*r*) la parallaxe du Soleil de 10″ 3.‴ ; que leurs denſités ſont entr'elles comme 100, 94, 67 & 400 ; & que les poids du même corps tranſporté ſucceſſivement ſur la ſurface du Soleil, de Jupiter, de

Maſſe du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre.

Leurs denſités.

Poids du même corps à leur ſurface.

(*r*) *La parallaxe* du Soleil eſt l'angle ſous lequel le rayon de la terre eſt vû du Soleil, ainſi la parallaxe d'un aſtre quelconque par rapport à la terre, eſt l'angle ſous lequel le rayon de la terre ſeroit vû de cet aſtre.

Saturne & de la Terre, seroient de 10000, 943, 529 & 435, respectivement.

M. *Newton* a supposé, pour déterminer ces proportions, les demi diamétres du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre, comme 10000, 997, 791 & 109, respectivement.

Pourquoi ces proportions ne peuvent être connues dans les autres planetes.

On verra dans le Chapitre suivant, pourquoi l'on ne peut connoître la densité ni la quantité de matiere de Mercure, de Vénus & de Mars, ni ce que pesent les corps sur ces trois planetes.

XX.

Proportions des grosseurs & des masses des 3 planetes & du Soleil.

Il suit de toutes ces proportions que Saturne est environ 500 fois plus petit que le Soleil, & qu'il contient 3000 fois moins de matiere que lui; que Jupiter est 1000 fois plus petit que le Soleil, & qu'il contient 1033 fois moins de matiere que lui; que la Terre n'est qu'un point par rapport au Soleil, puisqu'elle est 1000000 fois plus petite que lui; & qu'enfin le Soleil est plus de 116 fois plus gros que toutes les planetes prises ensemble.

XXI.

Proportions des grosseurs & des masses des planetes & de la terre, & des autres planetes entr'elles.

En comparant les planetes entr'elles, on trouve qu'il n'y a que Mercure & Mars qui soient plus petites que la Terre; que Jupiter est non-seulement la plus grosse de toutes les planetes, mais qu'elle est plus grosse que toutes les autres planetes prises ensemble, & que cette planete est plus de deux mille fois plus grosse que la Terre.

XXII.

De la précession des équinoxes.

La Terre, outre son mouvement annuel & son mouvement diurne, a encore un autre mouvement par lequel son axe dérange son (*f*) parallélisme, & répond au bout d'un certain tems à différens points du ciel; ce mouvement cause ce qu'on appelle *la précession des équinoxes*, c'est-à-dire, la rétrogradation des points

(*f*) On appelle *parallele* une ligne qui conserve toujours la même position par rapport à quelque point supposé fixe.

équinoctiaux,

équinoctiaux, ou des points dans lesquels l'équateur de la Terre coupe l'écliptique ; le mouvement des points équinoctiaux se fait contre l'ordre des signes, & il est si lent, qu'il ne s'acheve qu'en 25920 années, il est d'un dégré en 72 ans, & de 50″ en une année environ.

En quel sens elle se fait, & en quel tems elle s'accomplit.

Sa quantité annuelle.

M. *Newton* a trouvé, comme on le verra dans la suite, la cause de ce mouvement dans l'attraction du Soleil & de la Lune, sur la protubérance de la Terre à l'équateur.

La précession des équinoxes fait que les Astronomes distinguent *l'année tropique de l'année sydéralle ;* ils appellent année tropique l'intervale de tems qui s'écoule entre les deux mêmes équinoxes dans deux révolutions annuelles de la Terre, & cette année est un peu plus courte que l'année sydéralle, qui est composée du tems que la terre employe à revenir d'un point quelconque de son orbite à ce même point.

Année *tropique* & année *sydéralle.*

XXIII.

Il reste à parler des planetes secondaires qui sont au nombre de 10, sans compter l'anneau de Saturne ; ces 10 planetes sont les 5 Lunes de Saturne, les 4 de Jupiter, & celle qui accompagne la Terre.

Des planetes secondaires.

Les observations ont fait voir que les planetes secondaires observent les régles de *Kepler*, en tournant autour de leur planete principale.

Elles observent les régles de *Kepler.*

Il n'y a pas longtems qu'on a découvert les satellites de Jupiter & de Saturne, & cette découverte étoit impossible avant les télescopes ; (*t*) *Galilée* découvrit les 4 satellites de Jupiter, qu'il appella *les astres de Médicis*, & qui sont d'une grande utilité dans la Géographie & l'Astronomie.

Découverte des satellites de Jupiter.

M. *Hughens* fut le premier qui découvrit un satellite à Saturne,

Et de ceux de Saturne.

(*t*) M. *Volf* dans son Astronomie, Chap. II. prétend que Simon *Marius*, Mathématicien Brandbourgeois, découvrit en Allemagne trois satellites de Jupiter, la même année que *Galilée* les découvrit en Italie.

& il a retenu son nom, c'est le 4e. M. *Cassini* le pere découvrit les quatre autres.

XXIV.

Distances des Lunes de Jupiter à cette planete, & leurs tems périodiques autour de Jupiter.

En prenant le demi diamétre de Jupiter pour commune mesure, ses 4 satellites se trouvent placés aux distances suivantes, en commençant par celui qui en est le plus près.

Le premier en est à 5, le second à 9, le troisiéme à 14, & le quatriéme enfin à 25 en nombre rond, selon les observations de M. *Cassini* sur les éclipses de ces satellites.

Leurs tems périodiques autour de Jupiter sont d'autant plus longs, qu'ils sont plus éloignés de cette planete, le premier tourne en 42^{h}, le second en 85, le troisiéme en 171, & le quatriéme en 400, en négligeant les minutes.

On ne connoît ni la révolution diurne, ni le diamétre, ni la grosseur, ni la masse, ni la densité, ni la quantité de la force attractive de ces satellites, & jusqu'à présent les meilleurs télescopes les ont fait voir si petits, qu'on ne peut gueres espérer de parvenir à ces découvertes. Il en est de même des cinq Lunes qui tournent autour de Saturne.

XXV.

En prenant le demi diamétre de l'anneau de Saturne pour commune mesure, les distances des satellites de Saturne à cette planete, sont dans les proportions suivantes en commençant par le plus intérieur.

Distances des satellites de Saturne à Saturne, & leurs tems périodiques autour de cette planete.

Le premier en est à 1, le second à 2, le troisiéme à 5, le quatriéme à 8, & le cinquiéme à 24 en nombre rond, & leurs tems périodiques sont, selon M. *Cassini*, de 45^{h}, 65^{h}, 109^{h}, 382^{h}, & 1903^{h}, respectivement.

Les satellites de Saturne font tous leur révolution dans le plan de l'équateur de cette planete, il n'y a que le cinquiéme qui s'en éloigne de 15 ou 16 dégrés.

Plusieurs Astronomes, & entr'autres M. *Hughens*, ont soupçonné qu'on découvriroit peut-être quelque jour, si on peut perfectionner les télescopes, un sixiéme satellite de Saturne entre le quatriéme & le cinquiéme, la distance qui est entre ces deux satellites étant trop grande proportionnellement à celle qui sépare les autres; mais il se trouveroit alors cette autre difficulté, que ce satellite, qui seroit le cinquiéme, seroit cependant beaucoup plus petit que les quatre qui lui seroient intérieurs, puisqu'il faudroit de meilleurs télescopes pour l'appercevoir.

Conjecture de M. *Hughens* sur un sixieme satellite de Saturne.

Les orbes des satellites de Jupiter & de Saturne, sont presque concentriques à ces planetes.

M. *Maraldi* a observé des taches sur les satellites de Jupiter; mais on n'a pu tirer encore aucune conséquence de cette observation, qui pourroit, si elle étoit suivie, nous apprendre beaucoup de choses sur les mouvemens des satellites.

Observation de M. *Maraldi* sur les satellites de Jupiter.

X X V I.

Saturne, outre ses cinq Lunes, est encore entourré d'un anneau; cet anneau n'adhere au corps de Saturne dans aucune de ses parties, car on voit les étoiles fixes à travers l'espace qui le sépare du corps de cette planete; le diamétre de cet anneau est au diamétre de Saturne environ comme 9 à 4, selon M. *Hughens*, ainsi il est plus que double du diamétre de Saturne; la distance du corps de Saturne à son anneau est d'environ la moitié de ce diamétre, ensorte que la largeur de l'anneau est à peu près égale à la distance qui est entre son limbe intérieur & le globe de Saturne; son épaisseur est très-petite, car lorsqu'il nous présente le tranchant, il n'est pas visible pour nous, & il ne paroît alors que comme une raie noire qui traverse le globe de Saturne; ainsi cet anneau a des phases selon la position de Saturne dans son orbe, ce qui prouve que c'est un corps opaque, & qui ne brille, comme les autres corps de notre systême planétaire, qu'en nous réfléchissant la lumiere du Soleil.

De l'anneau de Saturne.
Il n'adhere point au corps de cette planete.
Sa distance au corps de la planete.
Son diamétre.
Sa largeur.
Son épaisseur.
C'est un corps opaque, & qui a des phases.

On ne peut découvrir si l'anneau de Saturne tourne sur lui-même,

car il ne paroît aucun changement dans son aspect d'où l'on puisse conclure cette rotation.

Le plan de cet anneau fait toujours, avec le plan de l'écliptique, un angle de 23° $\frac{1}{2}$, ainsi son axe reste toujours paralléle à lui-même dans sa translation autour du Soleil.

De la découverte de cet anneau.
Ce qu'on en pensoit avant M. *Hughens*.

C'est à M. *Hughens* qu'on doit la découverte de l'anneau de Saturne, qui est un phénomene unique dans le ciel ; avant lui les Astronomes avoient observé des phases dans Saturne, car ils confondoient cette planete avec son anneau ; mais ces phases étoient si différentes de celle des autres planetes, qu'on ne pouvoit les expliquer : on peut voir dans *Henelius* les noms qu'il donne à ces apparences de Saturne, & combien (*u*) il étoit loin d'en soupçonner la vérité.

M. *Hughens*, en comparant les différentes apparences de Saturne, a trouvé qu'elles étoient causées par un anneau dont il est entouré, & cette supposition répond si bien à tout ce que les télescopes y découvrent, qu'aucun Astronome ne doute à présent de l'éxistence de cet anneau.

Idée de *Gregori* sur cet anneau.

Gregori, en parlant de l'idée de M. *Hallei* que le globe terrestre pourroit bien n'être qu'un assemblage de croutes concentriques à un noyau intérieur, a conjecturé que l'anneau de Saturne étoit formé de plusieurs croutes concentriques qui se sont détachées du corps de la planete, dont le diamétre étoit auparavant égal à la somme de son diamétre actuel, & de la largeur de l'anneau.

On conjecture encore que l'anneau de Saturne n'est peut-être qu'un assemblage de Lunes que la grande distance nous fait voir comme contigues, mais tout cela n'est fondé sur aucune observation.

Les Satellites de Jupiter & de Saturne sont des corps sphériques.
Comment on s'en est assuré.

On sçait par les ombres des satellites de Jupiter & de Saturne sur leurs planetes principales, que ces satellites sont des corps sphériques.

(*u*) *Henelius in opusculo de Saturni nativa facie* distingue les différens aspects de Saturne par les noms de *monasphericum*, *trisphericum*, *spherico-ansatum*, *ellipti-coansatum*, *spheri-cocuspidatum*, & il subdivise encore ces phases en d'autres.

XXVII.

Notre terre n'a qu'un fatellite qui eft la Lune, mais fa proximité fait qu'on a pouffé bien plus loin les découvertes fur ce fatellite que fur les autres. De la Lune.

La Lune fait fa révolution autour de la terre dans une ellipfe dont la terre occupe un des foyers ; cette ellipfe change fans ceffe de pofition & d'efpéce, & on verra dans les Chapitres fuivans, que le Soleil eft la caufe de ces variations. Quelle eft la courbe qu'elle décrit autour de la terre.

La Lune fuit la premiere des deux régles de *Kepler* en tournant autour de la terre, & elle ne s'en dérange que par l'action du Soleil fur elle ; elle fait fa révolution autour de la terre, d'Occident en Orient, en 27 jours 7 h 43', & c'eft ce qu'on appelle *fon mois périodique.* Son mois périodique.

Le difque de la Lune que nous voyons eft tantôt entierement éclairé du Soleil, & tantôt il ne l'eft qu'en partie : fa partie éclairée nous paroît plus ou moins grande felon fa pofition par rapport au Soleil & à la terre, & c'eft ce qu'on appelle *fes phafes ;* elle fubit toutes fes phafes dans l'efpace d'une révolution qu'on appelle *fynodique*, & qui eft compofée du tems qu'elle employe à aller de fa conjonction avec le Soleil à fa prochaine conjonction, ce mois fynodique de la Lune eft de 29 jours ½ environ. Ses phafes. Son mois fynodique.

Les phafes de la Lune prouvent qu'elle eft un corps opaque, & qu'elle ne brille qu'en nous réfléchiffant la lumiere du Soleil. La Lune eft un corps opaque & fphérique.

On connoît que la Lune eft un corps fphérique, parce qu'elle nous paroît toujours terminée par une courbe. Comment on l'a découvert.

Notre terre éclaire la Lune pendant fes nuits de même que la Lune nous éclaire pendant les nôtres, & c'eft par la lumiere réfléchie de la terre, qu'on voit la Lune lorfqu'elle n'eft pas éclairée par la lumiere du Soleil. La terre éclaire la Lune pendant fes nuits.

Comme la furface de la terre eft environ 14 fois plus grande que celle de la Lune, la terre vûe de la Lune doit paroître 14 fois plus brillante, & envoyer 14 fois plus de rayons à la Lune, que Proportion de cette illumination.

la Lune ne nous en envoye, en supposant cependant que ces deux planetes soient également propres à réfléchir la lumiere.

Inclinaison du plan de l'orbite de la Lune.

Le plan de l'orbite de la Lune est incliné au plan de l'écliptique sous un angle de 5^d environ.

Le grand axe de l'ellipse, que la Lune décrit en tournant autour de la terre, est ce qu'on appelle *la ligne des apsides* (*x*) *de la Lune*.

La Lune accompagne la terre dans sa révolution annuelle autour du Soleil.

Ce que c'est que le *périgée* & l'*apogée*.

La ligne *des apsides* de la Lune est mobile.

Si l'orbite de la Lune n'avoit d'autre mouvement que celui de sa translation autour du Soleil avec la terre, l'axe de cet orbite demeureroit toujours parallele à lui-même, & la Lune, étant dans son *apogée* & dans son *périgée*, seroit toujours aux mêmes distances de la terre, & répondroit toujours aux mêmes points du ciel; mais la ligne des apsides de la Lune se meut d'un mouvement angulaire autour de la terre selon l'ordre des signes, & l'apogée & le périgée de la Lune ne reviennent aux mêmes points qu'au bout d'environ 9 ans, qui est le tems de la révolution de la ligne des apsides de la Lune.

Tems de la révolution de cette ligne.

Révolution des nœuds de la Lune.

L'orbite de la Lune coupe l'orbite de la terre en deux points, qu'on appelle *ses nœuds*; ces points ne sont pas toujours les mêmes, mais ils changent perpétuellement par un mouvement rétrogressif, c'est-à-dire, contre l'ordre des signes, & ce mouvement est tel, que dans l'espace de 19 ans les nœuds ont fait une révolution entiere, après laquelle ils reviennent couper l'orbe de la terre ou l'écliptique aux mêmes points.

Tems de cette révolution.

Excentricité de la Lune.

L'excentricité de l'orbe de la Lune change aussi continuellement; cette excentricité est tantôt plus grande & tantôt moindre, ensorte que la différence entre la plus petite & la plus grande excentricité, surpasse la moitié de la plus petite.

(*x*) On appelle *ligne des apsides* pour la Lune, la ligne qui passe par l'*apogée* & par le *périgée*; l'*apogée* est le point de l'orbite le plus loin de la terre, & le *périgée* est le point de cet orbite qui est le moins éloigné. On nomme en général apsides, pour toutes les orbites, les points les plus éloignés & les plus proches du point central.

On verra dans les Chapitres ſuivans comment M. *Newton* a trouvé la cauſe de toutes ces inégalités de la Lune.

Le ſeul mouvement de la Lune qui ſoit égal, eſt ſon mouvement de rotation autour de ſon axe ; ce mouvement s'éxécute préciſément dans le même tems que ſa révolution autour de la terre, ainſi ſon jour eſt de 27 de nos jours, 7^h 43'.

Son mouvement autour de ſon axe.

Cette égalité du jour & du mois périodique de la Lune, fait qu'elle nous préſente toujours le même diſque à peu près.

En quel tems il s'exécute.

L'égalité du mouvement de la Lune autour de ſon axe, combinée avec l'inégalité de ſon mouvement autour de la terre, fait que la Lune nous paroît oſciller ſur ſon axe, tantôt vers l'Orient, & tantôt vers l'Occident, & c'eſt ce qu'on appelle *ſa libration ;* par ce mouvement elle nous préſente quelquefois des parties qui étoient cachées, & nous en cache qui étoient viſibles.

Libration de la Lune.

Cette libration vient du mouvement elliptique de la Lune, car ſi cette planete ſe mouvoit dans un cercle dont la terre occupât le centre, & qu'elle tournât ſur ſon axe dans le tems de ſon mouvement périodique autour de la terre, elle préſenteroit toujours éxactement à la terre la même face ſans aucune variation.

Sa cauſe.

On ne connoît point la forme de la partie de la ſurface de la Lune qui eſt de l'autre côté de ſon diſque par rapport à nous, & il y a même des Aſtronomes qui veulent expliquer ſa libration en donnant une forme conique à cette partie de ſa ſurface que nous ne voyons point, & qui nient ſa rotation ſur elle-même.

La ſurface de la Lune eſt pleine d'éminences & de cavités, c'eſt ce qui fait qu'elle réfléchit de toutes parts la lumiere du Soleil, car ſi elle étoit unie comme un de nos miroirs, elle ne nous réfléchiroit que l'image du Soleil.

La Lune eſt éloignée de la terre dans ſa moyenne diſtance de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre, environ.

Diſtance de la Lune à la terre.

Le diamétre de la Lune eſt au diamétre de la terre comme 100 à 365, ſa maſſe eſt à la maſſe de la terre comme 1 à 39, 788, & ſa denſité eſt à la denſité de la terre comme 11 à 9.

Son diamétre. Sa maſſe. Sa denſité.

Ce que les corps pesent sur la Lune.

Enfin le même corps qui pese trois livres à la surface de la terre, peseroit environ une livre à la surface de la Lune.

On connoît toutes ces proportions dans la Lune, & non dans les autres satellites, parce que cette planete offre un élément qui lui est particulier ; c'est son action sur les eaux de la mer que M. *Newton* a sçu mesurer & employer à la détermination de sa masse. Nous rendrons compte dans un des Chapitres suivans, de la méthode qu'il a suivie pour y parvenir.

CHAPITRE SECOND.

Comment la théorie de M. Newton explique les Phénomenes des planetes principales.

I.

Le premier Phénomene qu'il faut expliquer quand on veut rendre compte des mouvemens célestes, c'est celui de la circulation perpétuelle des planetes autour du centre de leur révolution.

Par la premiere loi du mouvement, tout corps suit de lui-même la ligne droite dans laquelle il a commencé à se mouvoir, donc afin qu'une planete soit détournée de la petite ligne droite qu'elle tend à décrire à chaque instant, il faut qu'une force différente de celle qui la porte à décrire cette petite ligne agisse sans cesse sur elle pour l'en détourner, de même que la corde que tient la main de celui qui fait tourner un corps en rond empêche à chaque moment ce corps de s'échapper par la tangente du cercle qu'on lui fait décrire.

Comment les anciens Philosophes & *Descartes* en dernier lieu expliquoient

Les Anciens, pour expliquer ce Phénomene, avoient imaginé des cieux solides, & *Descartes* des tourbillons ; mais l'une & l'autre de ces explications étoient de pures hypothèses dénuées de preuves, &

& si celle de *Descartes* étoit plus philosophique, elle n'en étoit pas plus solidement établie.

la circulation des planetes dans leur orbe.

I I.

M. *Newton* commence par prouver dans la premiere proposition (*a*), que les aires qu'un corps décrit autour d'un centre immobile auquel il tend continuellement, sont proportionnelles au tems; & réciproquement dans la seconde, que si un corps décrit en tournant autour d'un centre des aires proportionnelles au tems, ce corps est attiré par une force qui le porte vers ce centre : donc, puisque selon la découverte de *Kepler* les planetes décrivent autour du Soleil des aires proportionnelles au tems, elles ont une force centripéte qui les fait tendre vers le Soleil, & qui les retient dans leur orbe.

C'est la force centripéte qui empêche les planetes de s'échapper par la tangente.

M. *Newton* a fait voir, de plus, (Cor. 1. Prop. 2.) que si la force qui agit sur le corps le faisoit tendre vers divers points, elle accéleroit ou retarderoit la description des aires qui ne seroient plus alors proportionnelles au tems : donc, si les aires sont proportionnelles au tems, non-seulement le corps est animé par une force centripéte qui le porte vers le corps central, mais cette force le fait tendre à un seul & même point.

I I I.

De même que la révolution des planetes dans leur orbe prouve une force centripéte qui les retire de la tangente, ainsi de ce qu'elles ne tombent pas en ligne droite vers le centre de leur révolution, on peut conclure qu'une force, autre que la force centripéte, agit sur elles. M. *Newton* a cherché (*b*) quel tems chaque planete, placée à la distance où elle est, employeroit à tomber sur le Soleil si elle n'obéissoit qu'à l'action du Soleil sur elle, &

(*a*) Quand on cite des propositions, sans citer le Livre, ce sont des propositions du Livre premier.

(*b*) *De Systemate mundi*, pag. 31. édition de 1731.

il a trouvé que les différentes planetes employeroient à y tomber la moitié du tems périodique qu'un corps mettroit à faire sa révolution autour du même centre à une distance deux fois moindre que la leur, & que par conséquent ce tems devoit être à leur tems périodique comme 1 à 4 $\sqrt{2}$: ainsi Vénus, par exemple, mettroit environ quarante jours à arriver au Soleil, car 40 : 224 :: 1 : 4 $\sqrt{2}$. à peu près; Jupiter employeroit deux ans & un mois, & la terre & la Lune soixante-six jours & dix-neuf heures, &c. Donc, puisque les planetes ne tombent pas dans le Soleil, il faut que quelque force s'oppose à la force qui les fait tendre vers leur centre, & cette force est ce qu'on appelle *la force projectile.*

Et la force projectile les empêche de tomber vers leur centre. Prop. 36.

I V.

L'effort que font les planetes en vertu de cette force pour s'éloigner du centre de leur mouvement, est ce qu'on appelle leur *force centrifuge*; ainsi dans les planetes, la force centrifuge est la partie de la force projectile qui les éloigne directement du centre de leur révolution.

De la force centrifuge des planetes.

V.

La force projectile a la même direction dans toutes les planetes, car elles tournent toutes autour du Soleil d'Occident en Orient.

En supposant que la résistance du milieu dans lequel les planetes se meuvent soit nulle, on trouve la raison de la conservation du mouvement projectile des planetes dans l'inertie de la matiere, & dans la premiere loi du mouvement, mais sa cause physique & la raison de sa direction sont encore cachées pour nous.

V I.

Après avoir prouvé que les planetes sont retenues dans leur orbite par une force qui tend vers le Soleil, M. *Newton* démontre prop. 4. que les forces centripétes des corps qui décrivent des cercles, sont entr'elles comme les quarrés des arcs de ces cercles parcourus en tems égal, & divisés par leurs rayons; d'où il tire, que si

M. *Newton* est parvenu à découvrir que la force qui porte les planetes vers le Soleil, suit la proportion inverse

les tems périodiques des corps révoluans dans des cercles font en raifon fefquiplée de leurs rayons, la force centripéte qui les porte vers le centre de ces cercles, eft en raifon réciproque des quarrés de ces mêmes rayons, c'eft-à-dire des diftances de ces corps au centre : or, par la feconde regle de *Kepler*, que toutes les planetes obfervent, les tems de leurs révolutions font entr'eux en raifon fefquiplée de leurs diftances à leur centre, donc, la force qui porte les planetes vers le Soleil décroit en raifon inverfe du quarré de leurs diftances à cet aftre, en fuppofant qu'elles tournent dans des cercles concentriques au Soleil.

doublée des diftances, par celle qui eft entre leurs diftances au Soleil & leurs tems périodiques. Prop. 4. Cor. 6.

Et en fuppofant d'abord leurs orbes circulaires.

VII.

L'idée qui fe préfente le plus naturellement à l'efprit, quant aux orbes des planetes, c'eft qu'elles font leurs révolutions dans des cercles concentriques ; mais leurs différens diamétres apparens, & plus d'éxactitude dans les obfervations, avoient fait connoître depuis longtems que leurs orbes ne pouvoient être concentriques au Soleil : on expliquoit donc leurs cours avant *Kepler* par des cercles excentriques qui fatisfaifoient affez bien aux obfervations pour le Soleil & les planetes, fi on en excepte Mercure & Mars.

On croyoit avant *Kepler* que les planetes tournoient autour du Soleil dans des cercles excentriques.

Ce fut le cours de cette derniere planete qui fit foupçonner à *Kepler* que l'orbe des planetes pourroit bien être une ellipfe dont le Soleil occupe un des foyers, & cette courbe s'accorde fi parfaitement avec les Phénomenes, qu'il eft à préfent reconnu de tous les Aftronomes, que c'eft dans des ellipfes que les planetes tournent autour du Soleil, & que cet aftre occupe un des foyers de ces ellipfes.

Mais *Kepler* a fait voir qu'elles tournent dans des ellipfes.

VIII.

En partant de cette découverte, M. *Newton* a cherché quelle eft la loi de force centripéte néceffaire pour faire décrire une ellipfe aux planetes, & il a trouvé dans la prop. 11. que cette force doit fuivre la proportion inverfe du quarré des diftances du corps au foyer de cette ellipfe ; mais on vient de voir qu'il avoit

trouvé dans le cor. 6. de la prop. 4. que dans les cercles, les tems périodiques des corps révoluans étant en raiſon ſeſquiplée des diſtances, la force étoit inverſement comme le quarré de ces mêmes diſtances; il ne reſtoit plus, pour être entierement ſûr que la force centripéte qui dirige les corps céleſtes dans leurs cours ſuit la proportion inverſe du quarré des diſtances, qu'à examiner ſi les tems périodiques ſuivent la même proportion dans les ellipſes que dans les cercles.

M. *Newton* a fait voir que dans les ellipſes les tems périodiques ſont dans la même proportion que dans les cercles.

Or; M. *Newton* fait voir dans la prop. 15. que les tems périodiques dans les ellipſes ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs grands axes; c'eſt-à-dire, que ces tems ſont dans la même proportion dans les ellipſes, & dans les cercles dont les diamétres ſeroient égaux aux grands axes des ellipſes.

Cette courbe que les planetes décrivent dans leur révolution a cette propriété, que ſi l'on en prend de petits arcs parcourus en tems égal, l'eſpace compris entre la ligne tirée de l'une des extrémités de cet arc & la tangente à l'autre extrémité croit à meſure que le quarré de la diſtance au foyer diminue, & cela dans la même proportion; d'où il ſuit, que le pouvoir attractif qui eſt proportionnel à cet eſpace, ſuit auſſi la même proportion.

I X.

Et que par conſéquent la force centripéte qui retient les planetes dans leur orbe, décroit comme le quarré de la diſtance.

M. *Newton* ne s'eſt pas contenté d'examiner la loi qui fait décrire des ellipſes aux planetes, mais il a examiné ſi cette même loi ne pouvoit pas faire décrire d'autres courbes aux corps, & il a trouvé (Cor. 1. prop. 13.) qu'elle ne leur feroit jamais décrire qu'une des Sections coniques dont le centre des forces ſeroit le foyer, & cela quelque fût la viteſſe projectile.

La force centripéte étant dans cette proportion, les planetes ne peuvent décrire que des Sections coniques dont le Soleil occupe un des foyers.

Les autres loix qui feroient décrire des Sections coniques, les feroient décrire autour d'autres points que le foyer; M. *Newton* a trouvé *P. E.* que ſi la puiſſance eſt comme la diſtance au centre, elle fera décrire au corps une Section conique dont le centre ſera le centre des forces, ainſi M. *Newton* a non-ſeulement trouvé la

loi que suit la force centripéte dans notre sistême planétaire, mais il a fait voir qu'une autre loi ne pouvoit avoir lieu dans notre monde tel qu'il est. Prop. 10.

X.

Maniere de déterminer l'orbe d'une planete, en supposant la loi de la force centripéte donnée.

M. *Newton* a cherché ensuite prop. 17. la courbe que doit décrire un corps dont la force centripéte décroit en raison inverse du quarré des distances, en supposant que ce corps parte d'un point donné avec une vitesse & une direction prises à volonté.

Il est parti pour la solution de ce problême, de la remarque qu'il avoit fait prop. 16. que les vitesses des corps qui décrivent des Sections coniques, sont à chaque point de ces courbes, inversement comme les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes, & directement comme les racines quarrées des paramétres.

Outre que cette proposition fait un problême intéressant pour la seule Géométrie, il est encore très-utile dans l'Astronomie; car en découvrant par quelques observations la vitesse & la direction d'une planete dans quelque partie de son orbite, on peut, à l'aide de cette proposition, trouver le reste de l'orbite, & la détermination de l'orbite des cométes peut être en grande partie fondée sur la même proposition.

X I.

Quelles courbes d'autres loix de forces centripétes feroient décrire.

La proportion entre la force centripéte & la force projectile est la cause de la circulation perpétuelle des planetes dans leur orbe.

Il est aisé de s'appercevoir que d'autres loix de force centripéte que celle du quarré des distances feroient décrire d'autres courbes, & il y auroit telle loi dans laquelle les planetes, malgré la force projectile, descendroient vers le Soleil, & telle autre dans laquelle, malgré leur force centripéte, elles s'en iroient à l'infini dans les espaces célestes; telle autre leur feroit décrire des spiralles, &c. & M. *Newton* cherche dans la prop. 42. quelles seroient les courbes décrites dans toutes sortes d'hypotêses de force centripéte.

X I I.

On voit par tout ce qu'on vient de dire que la circulation perpétuelle des planetes dans leur orbe, dépendoit de la proportion

entre la force centripéte & la force projectile, & que ceux qui demandent pourquoi, lorsque les planetes sont arrivées à leur périhélie, elles remontent à leur aphélie, ne connoissent pas cette proportion; car dans la plus haute apside, la force centripéte surpasse la force centrifuge, puisqu'alors le corps s'approche du centre, & dans l'apside la plus basse, la force centrifuge surpasse à son tour la force centripéte, puisqu'en remontant le corps s'éloigne du centre, donc il falloit une certaine combinaison entre la force centripéte & la force centrifuge, pour que ces forces se surpassassent alternativement l'une & l'autre, & qu'elles fissent aller perpétuellement le corps de l'apside la plus haute à la plus basse, & de la plus basse à la plus haute.

On fait encore une objection sur la continuation des mouvemens célestes, tirée de la résistance qu'ils doivent éprouver dans le milieu dans lequel ils se meuvent. M. *Newton* a répondu à cette objection dans la Prop. 10. du Liv. 3. où il fait voir que la résistance des milieux diminue en raison de leurs poids & de leur densité; or, il avoit fait voir dans le Scholie de la Prop. 22. Liv. 2. qu'à la hauteur de 200 milles au-dessus de la surface de la terre, l'air y est plus rare qu'à sa surface dans la raison de 30000,0000000000003998 ou de 75000000000000 à 1. environ; d'où il conclut (Prop. 10. Liv. 3.) que supposant de cette densité le milieu dans lequel se meut Jupiter, cette planete parcourant en 30 jours 5 de ses demi diamétres, elle perdroit à peine en 1000000 ans, par la résistance d'un tel milieu, la 1000000eme partie de son mouvement. On voit donc que le milieu dans lequel se meuvent les planetes peut être si subtil, que sa résistance soit regardée comme nulle, & la proportionnalité observée constamment entre les aires & les tems, nous assure qu'en effet cette résistance est insensible.

XIII.

Puisqu'on a vû ci-dessus que la proportionnalité des tems & des aires que les planetes décrivent autour du Soleil, prouve qu'elles

tendent à cet astre comme à leur centre, & que la raison qui est entre leurs tems périodiques & leurs distances, fait connoître que cette force agit en raison doublée inverse des distances ; si les planetes qui font leur révolution autour du Soleil se trouvent environnées d'autres corps qui tournent autour d'elles, & qui suivent dans leurs révolutions ces mêmes proportions, il sera prouvé que ces corps révoluans éprouvent une force centripéte qui les porte vers ces planetes, & que cette force décroît comme celle du Soleil en raison du quarré de la distance.

Comment les planetes peuvent conserver leur mouvement malgré la résistance du milieu dans lequel elles se meuvent.

Nous ne connoissons que trois planetes qui ayent des corps révoluans autour d'elles, Jupiter, la Terre & Saturne ; on sçait que les satellites de ces 3 planetes décrivent autour d'elles des aires proportionnelles au tems, & que par conséquent ils sont animés par une force qui tend vers ces planetes.

X I V.

Jupiter & Saturne ayant chacun plusieurs satellites dont on connoît les tems périodiques & les distances, il est aisé de connoître si les tems de leur révolution autour de leur planete sont à leur distance dans la proportion découverte par *Kepler* ; & les observations font voir que les satellites de Jupiter & de Saturne observent aussi cette seconde loi de *Kepler* en tournant autour de leur planete, & que par conséquent la force centripéte dans Jupiter & dans Saturne, décroît en raison inverse du quarré de la distance des corps au centre de ces planetes.

La comparaison des tems périodiques & des distances des satellites de Jupiter & de Saturne, fait voir que la force qui porte les satellites de ces planetes vers leur planete principale, suit aussi la proportion doublée inverse des distances.

X V.

La terre n'ayant qu'un satellite, qui est la Lune, il paroît d'abord difficile de connoître la proportion dans laquelle agit la force qui fait tourner la Lune autour de la terre, puisqu'on manque pour cela de terme de comparaison.

M. *Newton* a trouvé le moyen d'y suppléer, & voici comment il y est parvenu.

Comment M. *Newton* est parvenu à découvrir que la force attractive de la terre suit la même proportion.

Tous les corps qui tombent ici-bas parcourent, ſelon la progreſſion découverte par *Galilée*, des eſpaces qui ſont comme les quarrés des tems employés à tomber.

On connoît la diſtance moyenne de la Lune à la terre qui eſt de 60 demi diamétres de la terre en nombres ronds, & tous les corps d'ici bas ſont cenſés à un demi diamétre du centre de la terre; donc ſi la même force fait tomber les corps & circuler la Lune dans ſon orbite, & ſi cette force décroît comme le quarré de la diſtance, elle doit agir 3600 fois plus ſur les corps placés à la ſurface de la terre que ſur la Lune, puiſque la Lune eſt 60 fois plus éloignée qu'eux du centre de la terre; on connoît l'orbe de la Lune puiſqu'on connoît à préſent la meſure de la terre, on ſçait que la Lune employe 27 jours 7 heures 43′ à parcourir cet orbe, on connoît par conſéquent l'arc qu'elle parcourt en une minute; or par le Cor. 9. de la Prop. 4. on voit que l'arc décrit en un tems donné par un corps qui tourne d'un mouvement uniforme & avec une force centripéte donnée dans un cercle eſt moyen proportionnel entre le diamétre de ce cercle & la ligne dont ce corps eſt deſcendu vers le centre dans le même tems.

Il eſt vrai que la Lune ne décrit pas éxactement un cercle autour de la terre, mais on peut le ſuppoſer dans le cas dont il s'agit ſans erreur ſenſible, & cette ſuppoſition faite, on trouve alors que la ligne qui exprime la quantité dont la Lune eſt tombée vers la terre en une minute par la force centripéte eſt de quinze pieds en nombres ronds.

Or la Lune, ſelon la progreſſion de *Galilée*, parcoureroit dans le lieu où elle eſt, 3600 fois moins d'eſpace en une ſeconde qu'en une minute, & les corps qui ſont à la ſurface de la terre parcourent, ſelon les expériences des pendules qu'on doit à M. *Hughens*, 15 pieds environ en une ſeconde, c'eſt-à-dire, 3600 fois plus d'eſpace que la Lune, donc la force qui les fait tomber agit 3600 fois plus ſur eux que ſur la Lune, ce qui eſt préciſément la proportion des quarrés de leurs diſtances.

On

On voit par cet exemple de quelle utilité est la mesure de la terre; car pour pouvoir comparer cette flêche qui exprime la quantité dont la Lune s'est approchée de la terre, à l'espace contemporain dont la pesanteur fait tomber les corps près de la surface de la terre dans le même tems, il faut avoir la distance absolue de la Lune à la terre, réduite en pieds, ainsi que la longueur du pendule, car il ne suffit pas dans ce cas d'avoir des rapports, mais il faut des grandeurs absolues.

X V I.

Jupiter, Saturne & notre Terre attirent donc les corps dans la même proportion que le Soleil les attire eux-mêmes, & l'induction nous porte à conclure, que la gravité suit les mêmes proportions dans Mars, Vénus & Mercure : car partout ce que nous connoissons de ces trois planetes, elles nous paroissent des corps de la même espéce que la Terre, Jupiter & Saturne; ainsi on peut conclure, avec beaucoup de vraisemblance, qu'elles ont la force attractive, & que cette force décroît comme le quarré des distances.

La mesure de la terre étoit nécessaire pour cette découverte.

L'analogie nous porte à conclure que l'attraction suit aussi la même proportion dans les planetes qui n'ont pas de satellites.

X V I I.

Puisqu'il est prouvé par les observations & par l'induction que toutes les planetes ont la force attractive en raison inverse du quarré des distances, & que par la seconde loi du mouvement l'action est toujours égale à la réaction, on doit conclure, avec M. *Newton*, que toutes les planetes gravitent les unes vers les autres, & que de même que le Soleil attire les planetes, il est réciproquement attiré par elles; car puisque la Terre, Jupiter & Saturne agissent sur leurs satellites en raison inverse du quarré des distances, il n'y a aucune raison qui puisse faire croire que cette action ne s'exerce pas à toutes les distances dans la même proportion; ainsi les planetes doivent s'attirer mutuellement, & on voit sensiblement les effets de cette attraction mutuelle dans la conjonction de Jupiter & de Saturne.

Prop. 5. Liv. 3.

De quel raisonnement M. *Newton* a conclu la gravitation mutuelle de tous les corps célestes.

XVIII.

L'analogie nous portant à croire que les planetes secondaires sont en tout des corps de la même espéce que leurs planetes principales, il est très-vraisemblable qu'elles ont aussi la force attractive, & que par conséquent elles attirent leur planete principale de même qu'elles en sont attirées, & qu'elles s'attirent aussi mutuellement l'une l'autre, ce qui est confirmé encore par l'attraction de la Lune sur la terre, dont les effets deviennent sensibles dans les marées & dans la précession des équinoxes, comme on le verra dans la suite.

On peut donc conclure que la force attractive appartient à tous les corps célestes, & qu'elle agit dans tout notre systême planétaire selon la proportion doublée inverse des distances.

XIX.

Quelle est la cause pour laquelle un corps tourne autour d'un autre, au lieu de le forcer à tourner autour de lui.

Mais quelle est la raison qui fait tourner un corps autour d'un autre ? Pourquoi, par exemple, si la Lune & la terre s'attirent réciproquement en raison inverse du quarré de leurs distances, la terre ne tourne-t'elle pas autour de la Lune, au lieu de faire tourner la Lune autour d'elle ; il faut certainement que la loi que suit l'attraction ne dépende pas seulement de la distance, & qu'il y entre quelque autre élément par lequel on puisse rendre raison de cette détermination, car la distance est ici insuffisante, puisqu'elle est la même pour l'un & l'autre globe.

Cette cause paroît être la masse du corps central.

Il est aisé, en examinant les corps qui composent notre systême planétaire, de soupçonner que cette loi est celle des masses ; le Soleil autour duquel tournent tous les corps célestes nous paroît beaucoup plus gros qu'aucun d'eux, Saturne & Jupiter sont beaucoup plus gros que leurs satellites, & notre terre l'est plus que la Lune qui tourne autour d'elle.

Mais pour s'en assurer, il falloit connoître les masses des différentes planetes.

Or, comme la grosseur & la masse sont deux choses différentes, pour être assuré que la gravité des corps célestes suit la loi des masses, il étoit donc néceessaire de connoître ces masses.

Mais comment connoître la masse des différentes planetes, c'est ce que la théorie de M. *Newton* nous apprend.

X X.

Voici le chemin qu'il a suivi pour parvenir à cette découverte.

Puisque l'attraction de tous les corps célestes sur les corps qui les environnent suit la proportion inverse du quarré des distances, il est bien vraisemblable que les parties dont ils sont composés s'attirent dans la même proportion.

Chemin que M. *Newton* a suivi pour parvenir à cette découverte.

La force attractive totale d'une planete est composée de la force attractive de ses parties; car si l'on conçoit que plusieurs petites planetes s'unissent pour en former une grosse, la force de cette grosse planete sera composée des forces de toutes ces petites planetes, & M. *Newton* a prouvé dans les Prop. 74, 75 & 76. que si les particules dont une sphère est composée s'attirent mutuellement en raison inverse du quarré des distances, ces sphéres entieres attireront les corps qui leur sont extérieurs, à quelque distance qu'ils soient placés, dans cette même raison inverse du quarré de leurs distances; & de toutes les loix d'attraction examinées par M. *Newton*, il n'a trouvé que celle en raison inverse du quarré des distances, & celle qui suivroit la raison de la simple distance dans lesquelles les sphéres entieres attirent les corps qui leur sont extérieurs, dans la même raison que leurs parties s'attirent l'une l'autre.

On voit par-là la force du raisonnement qui a fait conclure à M. *Newton* (Cor. 3. Prop. 74.) que puisqu'il est prouvé d'un côté par la théorie, que lorsque les particules d'une sphére s'attirent réciproquement dans la raison inverse du quarré des distances, la sphere entiere attire les corps extérieurs dans la même raison, & que de l'autre les observations font voir que les corps célestes attirent dans cette proportion les corps qui leur sont extérieurs : il est bien simple de conclure que les parties dont les corps célestes sont composés s'attirent réciproquement dans cette même raison.

Il a commencé par trouver les poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance.

M. *Newton* cherche dans la Prop. 8. du Liv. 3. ce que peseroit le même corps sur les différentes planetes, & il le trouve en faisant usage du Cor. 2. de la Prop. 4. dans lequel il a fait voir que les poids des corps égaux qui circulent dans des cercles, sont comme les diamétres de ces cercles directement, & comme le quarré de leurs tems périodiques inversement ; donc connoissant les tems périodiques de Vénus autour du Soleil, des satellites de Jupiter autour de cette planete, des Lunes de Saturne autour de Saturne, & de la Lune autour de la Terre, & la distance de ces corps aux centres autour desquels ils tournent ; & supposant que ces corps décrivent des cercles dans leur révolution, ce qui peut se supposer dans le cas dont il s'agit, on trouve quel seroit le poids du même corps transporté successivement à la même distance du centre du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre.

Et il a fait voir ensuite que la quantité de matiere est proportionnelle aux poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance du centre.

Le poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance de leur centre, étant connu, M. *Newton* en conclut la quantité de matiere que chacune d'elles contient, car l'attraction dépendant de la masse & de la distance, à égale distance les forces attractives sont comme les quantités de matiere des corps qui attirent ; donc les masses des différentes planetes sont comme les poids du même corps supposé à égale distance de leurs centres.

XXI.

D'où il a tiré leur densité.

On peut connoître par le même moyen la densité du Soleil & des planetes qui ont des satellites, c'est-à-dire, la proportion qui est entre leur diametre & la quantité de matiere qu'elles contiennent, car M. *Newton* (Prop. 72. Liv. 1.) a prouvé que les poids des corps égaux placés sur les surfaces des sphéres homogénes & inégales, sont comme les diamétres de ces sphéres ; donc si ces sphéres étoient hétérogénes & égales, les poids des corps à leurs surfaces seroient comme leur densité, en supposant qu'il n'entre dans la loi d'attraction que la distance & la masse du corps attirant ; donc aux surfaces des sphéres hétérogénes & inégales, les

poids des corps égaux feront en raifon compofée de la denfité de ces fphéres & de leur diamétre ; donc les denfités feront comme les poids des corps divifés par les diamétres.

XXII.

On connoît par-là que les plus petites planetes font les plus denfes, & qu'elles font placées le plus près du Soleil ; car on vû dans le Chap. I. où l'on a donné toutes les proportions de notre fyftême, que la terre qui eft plus petite & plus près du Soleil que Jupiter & Saturne, eft plus denfe que ces planetes.

Les planetes les plus petites & les plus denfes, font les plus voifines du Soleil.

XXIII.

M. *Newton* tire de-là la raifon de l'arrangement des corps céleftes de notre fyftême planétaire, qui eft tel que le requéroit la denfité de leur matiere, afin que chacun fut plus ou moins échauffé du Soleil à proportion de fa denfité & de fon éloignement ; car on fçait que plus un corps eft denfe, & plus il s'échauffe difficilement, d'où M. *Newton* conclut que la matiere de Mercure doit être fept fois plus denfe que celle de la terre, afin que la végétation puiffe y avoir lieu ; car on fçait que l'illumination à laquelle, toutes chofes égales, la chaleur eft proportionnelle, eft comme le quarré des approchemens : or, on connoît la proportion de la diftance de Mercure & de la Terre au Soleil, & par cette proportion on fçait que Mercure eft fept fois plus éclairé & par conféquent fept fois plus échauffé que la Terre ; & M. *Newton* dit avoir trouvé par fes expériences que la chaleur de notre été, augmentée fept fois, fait bouillir l'eau ; donc fi la terre étoit placée où eft Mercure, toute notre eau s'évaporeroit : fi elle l'étoit où eft Saturne, elle feroit toujours gelée, dans l'un & l'autre cas toute végétation cefferoit, & tout le genre animal périroit.

Quelle en eft la raifon fuivant M. *Newton*.

XXIV.

On voit qu'il n'y a que les planetes qui ont des fatellites dont

On ne connoît toutes les proportions que dans les planetes qui ont des satellites.

Il faut cependant en excepter la Lune.

on puisse connoître la masse & la densité, puisque pour y parvenir, il faut comparer entr'eux les tems des révolutions des corps qui tournent autour de ces planetes, il faut cependant en excepter la Lune dont je parlerai dans la suite.

XXV.

On voit par-là pourquoi le Soleil est le centre des révolutions célestes.

La masse des planetes étant connue, on voit que les corps qui ont moins de masse tournent autour de ceux qui en ont plus, & que plus un corps a de masse, plus il a de force attractive, toutes choses égales; ainsi toutes les planetes tournent autour du Soleil parce que le Soleil a beaucoup plus de masse qu'aucune planete, car la masse du Soleil est à celles de Jupiter & de Saturne, à peu près comme 1 à 1100, & 3000 respectivement; donc ces deux planetes étant celles de notre systême qui ont le plus de masse, il suit que le soleil doit être le centre des mouvemens de notre systême.

XXVI.

Les altérations que Saturne & Jupiter se causent mutuellement dans leur cours, suivent la raison de leurs masses.

Si l'attraction se proportionne aux masses, l'altération causée par l'action de Jupiter sur l'orbe de Saturne dans leur conjonction, doit être beaucoup plus grande que celle qui est causée alors dans l'orbe de Jupiter par l'action de Saturne, puisque Jupiter a beaucoup plus de masse que Saturne, & c'est aussi ce qui arrive; l'altération de l'orbe de Jupiter dans sa conjonction avec Saturne, quoique sensible, est cependant beaucoup moindre que celle qu'on remarque dans l'orbe de Saturne.

XXVII.

Mais si l'effet de l'attraction, ou le chemin que fait le corps attiré, dépend de la masse du corps attirant, pourquoi ne dépendra-t-il pas aussi de la masse du corps attiré, c'est ce qui mérite assûrément qu'on l'examine.

On sçait que tous les corps d'ici-bas tombent également vîte vers la terre, quand on ôte la résistance de l'air; car dans la machine

de *Boyle*, quand on en a pompé l'air, de l'or & des plumes arrivent en même tems au fond.

M. *Newton* a confirmé cette expérience par une autre où les plus petites différences deviennent sensibles, même à la grossiereté de nos organes; il rapporte qu'il a fait plusieurs pendules de matiere très-différente, comme d'eau, de bois, d'or, de verre, &c. & que les ayant suspendus à des fils d'égale longueur, ils ont fait des oscillations sensiblement ysochrones pendant un très-long tems. Prop. 24. Liv. 2. & Prop. 6. Liv. 3.

XXVIII.

L'attraction se proportionne aux masses sans égard à la forme ni à l'espéce des corps qui s'attirent.

Il est donc hors de doute que la force attractive de notre terre se proportionne à la masse des corps qu'elle attire, & qu'à la même distance elle dépend uniquement de leur masse, c'est-à-dire, de leur quantité de matiere. Ainsi si on suppose les corps d'ici-bas transportés à l'orbe de la Lune, puisqu'on a prouvé ci-dessus que la même force agit sur la Lune & sur ces corps & qu'elle décroît comme le quarré des distances, les distances alors étant égales, il suit qu'en supposant que la Lune perdit son mouvement projectile, ces corps & le globe de la Lune arriveroient en même tems à la surface de la terre & parcoureroient les mêmes espaces, en supposant la résistance de l'air nulle.

XXIX.

La même chose est prouvée pour les planetes qui ont des satellites telles que Jupiter & Saturne. Si l'on supposoit que les satellites de Jupiter, par exemple, fussent tous placés à la même distance du centre de cette planete, & qu'ils fussent tous privés de leurs fixes projectiles, ils tomberoient tous vers elle, & arriveroient à la surface dans le même tems. Cette proposition est une suite de la proportion qui est entre les distances des satellites & les tems de leurs révolutions.

XXX.

On prouve de même, par la raison qui est entre les tems périodiques

& les diſtances des planetes principales au Soleil, que cet aſtre agit ſur chacune d'elles proportionnellement à ſa maſſe, car à des diſtances égales leurs tems périodiques ſeroient égaux, & ſi dans cette ſuppoſition les planetes perdoient toutes leur force projectile, elles arriveroient toutes en même tems au Soleil; donc le Soleil attire chaque planete en raiſon directe de ſa maſſe.

XXXI.

La régularité de l'orbe des ſatellites de Jupiter autour de cette planete eſt encore une preuve de cette vérité, car M. *Newton* a prouvé, Prop. 65. Cor. 3. que lorſqu'un ſyſtême de corps ſe meut dans des cercles ou dans des ellipſes régulieres, il faut que ces corps n'éprouvent d'action ſenſible que de la force attractive qui leur fait décrire ces courbes; or les ſatellites de Jupiter décrivent autour de cette planete des orbes circulaires ſenſiblement réguliers & concentriques à cette planete, les diſtances des ſatellites de Jupiter, & celle de Jupiter lui-même, au Soleil doivent être regardées comme égales, vû la petite proportion qui eſt entre les différences de leurs diſtances & la diſtance totale; donc ſi quelqu'un des ſatellites de Jupiter, ou Jupiter lui-même, étoit plus attiré par le Soleil qu'un autre ſatellite à raiſon de ſa maſſe, alors cette attraction plus forte du Soleil dérangeroit l'orbe de ce Satellite; & M. *Newton* dit, Prop. 6. Liv. 3. que ſi cette action du Soleil ſur un des ſatellites de Jupiter étoit plus ou moins grande à raiſon de ſa maſſe, que celle qu'il exerce ſur Jupiter à raiſon de la ſienne, ſeulement d'un millieme de ſa gravité totale, la diſtance du centre de l'orbe de ce ſatellite au Soleil, ſeroit plus ou moins grande que la diſtance du centre de Jupiter au Soleil, de $\frac{1}{2000}$ de ſa diſtance totale, c'eſt-à-dire, de la cinquiéme partie de la diſtance du ſatellite le plus éloigné de Jupiter à Jupiter, ce qui rendroit ſon orbe ſenſiblement excentrique; donc puiſque ces orbes ſont ſenſiblement concentriques à Jupiter, les gravités accélératrices du

Soleil

Soleil sur Jupiter & sur ses satellites sont comme leur quantité de matiere.

On peut faire le même raisonnement sur Saturne & sur ses satellites dont les orbes sont sensiblement concentriques à Saturne.

Les expériences & les observations nous portent donc à conclure que l'attraction des corps célestes est proportionnelle aux masses, tant dans le corps attirant que dans le corps attiré; que c'est la masse qui détermine un corps à tourner autour d'un autre; qu'on peut considérer indifféremment tout corps comme attirant & comme attiré; qu'enfin l'attraction est toujours réciproque entre deux corps, & que c'est la proportion qui est entre leurs masses qui décide si cette double attraction peut être sensible.

L'attraction est toujours réciproque.

XXXII.

L'attraction a encore une propriété, c'est d'agir également sur les corps en mouvement & sur les corps en repos, & de produire des accélérations égales en tems égaux, d'où il suit que son action est continue & uniforme. C'est ce que prouve la maniere dont la gravité accélére les corps qui tombent ici-bas, & ce qui suit du mouvement des planetes qui ne sont, comme nous l'avons fait voir, que de plus grands projectiles, mais toujours soumis aux mêmes loix.

L'attraction agit uniformément & continuellement, & produit des accélérations égales en tems égal, soit que les corps sur lesquels elle agit se meuvent, soit qu'ils soient en repos.

XXXIII.

Puisque la proportion qui est entre les masses des corps qui s'attirent décide du chemin que l'un fait vers l'autre, on voit que le Soleil ayant beaucoup plus de masse que les planetes, l'attraction qu'elles exercent sur lui ne doit pas être sensible. Cependant l'attraction des planetes sur le Soleil, quoique trop peu considérable pour être sensible, n'est cependant pas nulle; & en la considérant, on voit que le centre autour duquel chaque planete tourne n'est pas le centre du Soleil, mais le point où se trouve placé le centre commun de gravité du Soleil & de l'astre dont on considére la

Effet de l'attraction des planetes sur le Soleil.

révolution. Ainsi, comme on a vu dans le Chapitre I. §. 19. que la matiere du Soleil est à celle de Jupiter, par exemple, comme 1 à $\frac{1}{1067}$. & la distance de Jupiter au Soleil étant au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu plus grande, il suit que le centre commun de gravité de Jupiter & du Soleil tombe dans un point fort près de la surface du Soleil.

Par le même raisonnement on trouve que le centre de gravité de Saturne & du Soleil tombe dans la superficie du Soleil, & en faisant le même calcul pour toutes les planetes, M. *Newton* dit, que si la terre & toutes les autres planetes étoient placées du même côté, le centre commun de gravité du Soleil & de toutes les planetes seroit à peine éloigné du centre du Soleil d'un de ses diamétres. Car bien qu'on ne connoisse pas la masse de Vénus, de Mercure ni de Mars, cependant comme ces planetes sont beaucoup plus petites que Saturne & que Jupiter, qui ont elles-mémes infiniment moins de masse que le Soleil, on peut conclure que leur masse ne dérange pas cette proportion.

Prop. 12. Liv. 3.

XXXIV.

Cet effet est de le faire osciller autour du centre commun de gravité de notre systême planétaire.

C'est autour de ce centre commun de gravité que les planetes tournent, & le Soleil lui-même oscille autour de ce centre commun de gravité selon les proportions de l'attraction des planetes sur lui. Ainsi c'est improprement que lorsqu'on considére le mouvement de deux corps dont l'un tourne autour de l'autre, on regarde le corps central comme fixe. Les deux corps, c'est-à-dire, le corps central & celui qui tourne autour de lui, tournent tous deux autour de leur centre de gravité commun, mais le chemin qu'ils font autour de ce centre de gravité étant en raison réciproque de leur masse, la courbe que décrit le corps qui a beaucoup plus de masse est presque insensible : c'est pourquoi l'on ne considére que la courbe décrite par le corps dont la révolution est sensible, & on néglige ce petit mouvement du corps central qu'on regarde comme fixe.

XXXV.

La Terre & la Lune tournent donc autour de leur centre commun de gravité, & ce centre tourne lui-même autour du centre de gravité de la Terre & du Soleil. Il en est de même de Jupiter & de ses Lunes, de Saturne & de ses satellites, & enfin du Soleil & de toutes les planetes. Ainsi le Soleil, selon les différentes positions des planetes, doit se mouvoir successivement de tous les côtés autour du commun centre de gravité de notre systême planétaire.

XXXVI.

Ce centre commun de gravité est en repos.

Ce commun centre de gravité est en repos. Car les différentes parties de ce systême répondent toujours aux mêmes étoiles fixes; or, si ce centre n'étoit pas en repos, & qu'il se mût uniformément en ligne droite, on auroit remarqué, depuis le tems qu'on observe, des changemens dans les rapports des différentes parties de notre systême planétaire aux étoiles fixes; or, comme on n'y remarque aucun changement, on doit en conclure que le centre commun de gravité de notre systême planétaire est en repos.

Ce centre est le point dans lequel tous les corps qui composent notre systême planétaire viendroient se réunir s'ils perdoient leur mouvement projectile.

Ainsi ce centre ne peut être le centre du Soleil lequel se meut perpétuellement.

Le centre de gravité de notre systême planétaire étant en repos, le centre du Soleil ne peut être ce centre commun de gravité, puisqu'on vient de voir qu'il se meut selon les différentes positions des planetes, quoiqu'il ne se dérange jamais sensiblement de sa place, à cause du peu de distance qui est entre le centre de gravité commun de notre monde planétaire, & le centre du Soleil.

XXXVII.

Puisque l'attraction se proportionne à la masse du corps attirant, & à celle du corps attiré, on en doit conclure qu'elle appartient à chaque partie de la matiere, & que toutes les parties dont

L'attraction appartient à chaque particule de la matiere.

un corps eſt composé s'attirent mutuellement : car ſi l'attraction n'appartenoit pas à chaque partie de la matiere, elle ne ſuivroit pas la raiſon des maſſes.

XXXVIII.

Réponſe à l'objection qu'on tire de ce que l'attraction des corps d'ici-bas n'eſt pas ſenſible.

Cette propriété de l'attraction, d'être proportionnelle aux maſſes, fournit une réponſe à l'objection qu'on a coutume de faire contre l'attraction mutuelle des corps. Si tous les corps ont cette propriété de s'attirer mutuellement, pourquoi, dit-on, ne s'apperçoit-on pas de l'attraction qu'ils exercent ici-bas les uns ſur les autres ? mais on ſent aiſément que l'attraction étant proportionnelle aux maſſes des corps qui s'attirent, l'attraction que la terre exerce ſur les corps d'ici-bas, eſt beaucoup plus forte que celle qu'ils exercent mutuellement les uns ſur les autres, & que par conſéquent ces attractions partiales ſont abſorbées & rendues inſenſibles par celle de la terre.

XXXIX.

Elle le devient dans de certains cas, comme dans la déviation du fil à plomb au pied de Chimboraço.

Les Académiciens qui ont été meſurer un dégré du méridien au Pérou, ont cru s'appercevoir que l'attraction de la montagne de Chimboraço, la plus haute qu'on connoiſſe, cauſoit une déviation ſenſible dans le fil à plomb ; & il eſt certain, par la théorie, que l'attraction de cette montagne doit faire un effet ſur le fil & ſur tous les corps : mais il reſte à ſçavoir ſi la quantité de la déviation obſervée, eſt celle qui doit réſulter de la groſſeur de la montagne. Car outre que ces obſervations ne donnent pas exactement la quantité de la déviation, à cauſe des erreurs inévitables dans la pratique, il y a encore cet inconvénient, que la théorie ne donne pas de moyen d'aprétier exactement la quantité dont cette déviation doit être, parce qu'on ignore la figure totale de la montagne, ſa denſité, &c.

XL.

La même raiſon qui empêche qu'on ne s'apperçoive des attractions des corps d'ici-bas, fait que les attractions mutuelles des corps

céleſtes ſont très-rarement ſenſibles. Car l'attraction beaucoup plus puiſſante que le Soleil exerce ſur eux, empêche cette attraction mutuelle de paroître. Il y a cependant des cas où l'on s'en apperçoit, comme dans la conjonction de Saturne & de Jupiter qui dérangent alors réciproquement d'une maniere ſenſible leurs orbes, parceque l'attraction de ces deux planetes eſt trop forte pour être abſorbée par celle du Soleil.

XLI.

A l'égard des attractions ſenſibles de quelques corps d'ici-bas, telles que celles de l'aiman & de l'électricité, elles ſuivent d'autres loix, & ont vraiſemblablement d'autres cauſes que l'attraction uni verſelle de la matiere dont on parle ici.

Les attractions de l'aiman & de l'électricité ont des cauſes différentes, & ne ſuivent pas les mêmes proportions que l'attraction univerſelle des corps.

M. *Newton* a prouvé Prop. *66*. que les attractions mutuelles de deux corps qui tournent autour d'un troiſiéme, troublent moins la régularité de leurs mouvemens lorſque le corps autour duquel ils tournent eſt mû par leurs attractions, que s'il étoit en repos; ainſi le peu d'altération qu'on remarque dans le mouvement des planetes, eſt encore une preuve de la mutualité de l'attraction.

XLII.

Les aphélies des planetes, ainſi que leurs nœuds, & les plans dans leſquels elles ſe meuvent ſont en repos, en faiſant abſtraction de l'action des planetes les unes ſur les autres.

Prop. 14. Liv. 3. & Prop. 1 & 11. Liv. 1.

Les aphélies des planetes ſont en repos.

Mars, Vénus, Mercure & la Terre étant de très-petites planetes, elles ne cauſent aucune altération ſenſible dans leurs mouvemens reſpectifs : ainſi leurs aphélies & leurs nœuds ne peuvent être dérangés que par l'action de Jupiter & de Saturne. M. *Newton* conclut de ſa théorie que par cette cauſe, les aphélies de ces quatre planetes ſe meuvent un peu en conſéquence par rapport aux étoiles fixes, & il prétend que ces mouvemens ſuivent la proportion ſeſquiplée des diſtances de ces planetes au Soleil; d'où il tire, Prop. 14. Liv. 3. qu'en ſuppoſant que l'aphélie de Mars, dans lequel ce mouvement

Quelles exceptions les actions mutuelles des planetes les unes ſur les autres apportent à cette régle.

eſt plus ſenſible, faſſe en cent ans 33′ 20″ en conſéquence, les aphélies de la Terre, de Vénus & de Mercure feront 17′ 40″, 10′ 53″, & 4′ 16″ reſpectivement dans le même tems.

Suivant M. *Newton* les aphélies allant en conſéquence, les nœuds rétrogradent, & en ſuppoſant le plan de l'écliptique en repos, il dit que cette régreſſion eſt au progrès de l'aphélie dans un orbe quelconque, comme 10 à 21 à peu près. (*c*)

A l'égard de Jupiter & de Saturne, ils dérangent l'un l'autre à tout moment le mouvement de leurs aphélies, mais il en réſulte cependant un mouvement dans le même ſens, dont M. *Newton* n'a point aſſigné la proportion.

XLIII.

On néglige ces altérations dont même pluſieurs Aſtronomes ne conviennent pas.

Le repos ſenſible des aphélies eſt une nouvelle preuve que l'attraction agit en raiſon doublée inverſe des diſtances.

On néglige ces mouvemens inſenſibles des aphélies & des nœuds qui ſont ſi peu remarquables, que même pluſieurs Aſtronomes en nient l'exiſtence, & on regarde les aphélies, ainſi que les nœuds des planetes, comme en repos; d'où il ſuit une nouvelle preuve de ce que la gravité qui agit ſur elles ſuit la proportion inverſe doublée des diſtances. Car M. *Newton* a fait voir, Cor. 1. Prop. 45. que ſi la proportion de la force centripéte s'éloignoit de la proportion doublée pour s'approcher de la triplée, ſeulement d'une 60eme partie, les apſides avanceroient au moins de trois dégrés dans une révolution; donc, puiſque le mouvement des apſides, ſi elles ſe meuvent, eſt preſqu'inſenſible, la gravité ſuit ſenſiblement la proportion doublée inverſe des diſtances.

XLIV.

Les planetes ont encore un mouvement dont je n'ai point parlé dans ce Chapitre, parce qu'il ne paroît pas dépendre de leur gravité, c'eſt leur rotation ſur leur axe.

On a vû dans le Chapitre I. qu'on n'eſt aſſuré de cette rotation que pour le Soleil, la Terre, Mars, Jupiter & Vénus, & que les

(*c*) *De mundi Syſtemate*, pag. 36. édition de 1731.

Aſtronomes ne ſont pas même encore d'accord ſur le tems de la révolution de cette derniere planete ſur elle-même, bien qu'ils conviennent tous qu'elle y tourne. Mais quoiqu'on n'ait pas encore pû s'aſſurer par les obſervations que Mercure, Saturne & les ſatellites de Jupiter & de Saturne tournent ſur leur centre, il eſt bien vraiſemblable, par l'uniformité que la nature obſerve dans ſes opérations, que ces planetes ont auſſi ce mouvement de rotation autour de leur axe, & que tous les corps céleſtes de notre ſyſtême éprouvent cette révolution.

On ne connoît point la cauſe ni la raiſon du mouvement rotatoire des planetes.

Ce mouvement des planetes autour de leur axe eſt le ſeul des mouvemens céleſtes qui ſoit uniforme ; ce mouvement, comme je l'ai dit, ne paroît pas dépendre de leur gravité, & l'on n'en connoît point encore la cauſe.

X L V.

La gravité mutuelle des parties qui compoſent les planetes, les empêche de ſe diſſiper par la rotation.

La gravité mutuelle des parties qui compoſent les planetes les empêche de ſe diſſiper par cette rotation : car on ſçait que tout corps mû en rond acquiert une force centrifuge par laquelle il tend à s'éloigner du centre de ſa révolution ; ainſi ſans la gravité mutuelle des parties de la matiere, la rotation des planetes devroit diſſiper leurs parties. Car ſi la gravité d'une partie quelconque de la ſurface d'un corps qui tourne étoit détruite, cette partie, au lieu de tourner avec le corps, s'échapperoit par la tangente ; donc ſi la gravité ne s'oppoſoit pas à l'effort de la force centrifuge que les parties des corps céleſtes acquiérent en tournant ſur leur axe, cette force ſépareroit leurs parties.

X L V I.

Si cette tendance des parties des corps céleſtes, les unes vers les autres, s'oppoſe à l'effet de la force centrifuge, elle ne la détruit pas, & l'effet que produit cette force eſt de rendre inégaux les diamétres des corps révoluans ſuppoſés fluides. Car les planetes étant compoſées de matiere dont les parties tendent également vers leur

centre à égale distance, elles seroient sphériques si elles étoient en repos. Mais le mouvement rotatoire fait que leurs parties tendent par leur force centrifuge, à s'éloigner de leur centre avec d'autant plus de force, qu'elles sont placées plus près de l'équateur de la sphére révoluante : car on sçait par la théorie des forces centrifuges, que cette force, en supposant les tems égaux, augmente en même raison que le rayon du cercle que le corps décrit ; donc, en supposant fluide la matiere dont les corps célestes sont composés, la rotation augmentera le diamétre de leur équateur, & diminuera par conséquent celui de leurs pôles.

Le mouvement rotatoire doit élever l'équateur des planetes.

XLVII.

On s'apperçoit, par le moyen des télescopes, de cette différence des diamétres dans Jupiter, & on en a déterminé la quantité pour la terre par la mesure des dégrés.

On va voir dans le Chapitre suivant comment M. *Newton* s'y est pris pour déduire la figure de la terre de sa théorie, & ce que les observations ont enseigné sur cette matiere.

M. *Newton* a tiré de ces principes la proportion des axes de la terre.

CHAPITRE TROISIÉME.

De la détermination de la figure de la Terre, selon les principes de M. Newton.

I.

Puisque la force centrifuge des corps qui circulent augmente en raison du cercle décrit lorsque le tems de la révolution est le même, le mouvement rotatoire doit élever les régions de l'équateur. Car en supposant que la terre ait été sphérique & composée de matiere homogéne & fluide, avant d'avoir acquis le mouvement rotatoire,

La force centrifuge éleve les régions de l'équateur dans la rotation diurne.

rotatoire, il faut, afin que la matiere qui la compose conserve son équilibre dans cette rotation, & que la forme de la terre soit constante, que la colonne dont la pesanteur est diminuée par la force centrifuge, soit plus longue que celle dont la force centrifuge n'a point altéré la pesanteur : ainsi l'axe de la terre, qui passe par son équateur, doit être plus grand que celui qui passe par ses pôles.

II.

Méthode de M. *Newton* pour trouver la figure de la terre.

M. *Newton*, dans la Prop. 19. de son troisiéme Livre, a déterminé la quantité dont la colonne de l'équateur doit être plus longue que celle de l'axe, en supposant comme dans tout le reste de son Ouvrage, que la gravité qu'éprouvent les corps d'ici-bas n'est autre chose que le résultat des attractions de toutes les particules dont est composée la terre qu'il regarde comme homogéne. Il employe pour données dans ce Problême, 1°. la grandeur du rayon de la terre prise d'abord pour sphérique, & déterminé par M. *Picard* de 19615800. 2°. la longueur du pendule qui bat les secondes à la latitude de Paris, laquelle est de 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes.

Il est prouvé par la théorie des oscillations, & par cette mesure du pendule à secondes, qu'un corps à la latitude de Paris parcourt dans une seconde 2174 lignes, en faisant la correction nécessaire pour la résistance de l'air.

Un corps qui fait sa révolution dans un cercle à la distance de 19615800 pieds du centre, qui est le demi diamétre de la terre, en $23^h\ 56'\ 4''$, qui est le tems exact de sa révolution diurne, parcourt en une seconde, en supposant son mouvement uniforme, un arc de 1433, 46 pieds, dont le sinus verse est, 0, 0523656 pieds, ou 7, 54064 lignes; donc la force qui fait descendre les graves à la latitude de Paris, est à la force centrifuge que les corps acquiérent à l'équateur par la rotation de la terre, comme 2174 à 7, 54064. Ajoutant donc à la force de la gravité qui fait descendre les graves à la latitude de Paris, ce que la force centrifuge diminue de cette force à cette latitude, afin d'avoir la force entiere qui porte les

graves vers le centre de la terre à la latitude de Paris, M. *Newton* prouve que cette force totale eſt à la force centrifuge ſous l'équateur, comme 289 à 1, enſorte que ſous l'équateur la force centrifuge diminue la force centripéte de $\frac{1}{289}$.

M. *Newton* a donné dans la Prop. 91. Cor. 2. la proportion qui eſt entre l'attraction exercée par un ſphéroïde ſur un corpuſcule placé ſur le prolongement de ſon axe, & celle qui ſeroit exercée ſur le même corpuſcule par une ſphére dont le diamétre ſeroit le petit axe du ſphéroïde. Employant donc cette proportion, & ſuppoſant la terre homogéne & privée de tout mouvement, il trouve (Prop. 19. Liv. 3.) que ſi ſa forme eſt celle d'un ſphéroïde dont le petit axe ſoit au grand comme 100 à 101, la gravité au pôle de ce ſphéroïde doit être à la gravité au pôle d'une ſphére décrite ſur le petit axe du ſphéroïde, comme 126 à 125.

Par la même raiſon, imaginant un ſphéroïde dont le rayon de l'équateur ſeroit l'axe de révolution, la gravité à l'équateur, qui ſeroit alors le pôle de ce nouveau ſphéroïde, ſeroit à la gravité de la ſphére à ce même point, cette ſphére étant ſuppoſée avoir le même axe de révolution, comme 125 à 126.

M. *Newton* ſuppoſe enſuite que la moyenne proportionnelle entre ces deux gravités, exprime la gravité des parties de la terre au même lieu, c'eſt-à-dire, à l'équateur, & qu'ainſi la gravité des parties de la terre à l'équateur eſt au même lieu à la gravité des parties de la ſphére qui auroit le même axe de révolution, comme $125\frac{1}{2}$ à 126; & en employant ce qu'il a démontré prop. 72. que les ſphéres homogénes attirent à leur ſurface en raiſon directe de leurs rayons, il conclut que les attractions qu'exerce la terre au pôle & à l'équateur dans la ſuppoſition du ſphéroïde précédent, ſont en raiſon compoſée de 126 à 125, 126 à $125\frac{1}{2}$, & 100 à 101, c'eſt-à-dire, comme 501 à 500.

Mais il avoit démontré, Cor. 3. Prop. 91. que ſi on ſuppoſe le corpuſcule placé dans l'intérieur du ſphéroïde, il ſera alors attiré en raiſon de la ſimple diſtance au centre; donc les gravités, dans

les deux colonnes répondantes à l'équateur & au pôle, feront comme les diſtances au centre des corps qui y ſont placés ; donc, en ſuppoſant ces colonnes ou canaux communiquans partagés par des plans tranſverſaux qui paſſent à des diſtances proportionnelles à ces canaux, les poids de chacune des parties dans l'un de ces canaux feront aux poids de chacune des parties dans l'autre canal, comme les grandeurs de ces canaux ; & par conſéquent, ces poids feront entr'eux comme chacune de ces parties, & comme leurs gravités accélératrices conjointement, c'eſt-à-dire, comme 101 à 100, & comme 500 à 501, c'eſt dire comme 505 à 501 ; donc ſi la force centrifuge d'une partie quelconque dans le canal qui paſſe par l'équateur, eſt au poids abſolu de la même partie comme 4 à 505, c'eſt-à-dire, ſi la force centrifuge ôte du poids d'une partie quelconque dans la colonne qui paſſe par l'équateur $\frac{4}{505}$ parties, les poids de chacune des parties de l'un & de l'autre canal deviendront égaux, & le fluide ſera en équilibre. Mais on vient de voir que la force centrifuge d'une partie quelconque ſous l'équateur de la terre eſt à ſon poids comme 1 à 289, & non pas comme 4 à 505 ; il faut donc prendre pour les axes un autre rapport que celui de 100 à 101, & en prendre un tel, qu'il en réſulte que la force centrifuge ſous l'équateur ne ſoit que la 289e partie de la gravité.

Or, c'eſt ce qu'une ſimple régle de trois donne tout de ſuite : car ſi le rapport de 100 à 101 dans les axes a donné celui de 4 à 505 pour la proportion de la force centrifuge à la gravité, il eſt clair qu'il faudra celui de 229 à 230 pour donner le rapport 1 à 289 de la force centrifuge à la gravité.

D'où il a conclu le rapport des axes de la terre de 229 à 230.

III.

Cette concluſion de M. *Newton*, c'eſt-à-dire, la quantité de l'applatiſſement qu'il a déterminé, eſt fondée ſur ſon principe de la gravité mutuelle des parties de la matiere : mais l'aplatiſſement réſulteroit toujours de la théorie des fluides & de celle des forces centrifuges, quand même on n'admettroit pas les découvertes de

L'aplatiſſement de la terre doit toujours réſulter de la théorie des forces centrifuges & de celle des fluides, quelque hypothèſe de peſanteur qu'on prenne.

M. *Newton* ſur la peſanteur, à moins qu'on ne fît des hypothéſes bien peu vraiſemblables ſur la gravité primitive.

I V.

Cependant les meſures priſes en France avoient jeté du doute ſur la figure de la terre.

Malgré l'autorité de M. *Newton*, & quoique M. *Hughens* fut arrivé à la même concluſion de l'aplatiſſement en prenant une autre hypothéſe de peſanteur que celle de M. *Newton;* quoique d'ailleurs les expériences faites ſur les pendules dans les différentes régions de la terre euſſent toutes donné la diminution de la peſanteur vers l'équateur, & favoriſé par conſéquent l'aplatiſſement des pôles; on ſçait aſſez que les meſures priſes en France, & qui donnoient les dégrés plus petits en allant vers le nord, avoient jetté du doute ſur la figure de la terre. On faiſoit des hypothéſes ſur la peſanteur primitive qui donnoient à la terre, ſuppoſée en repos, une forme dont l'altération s'accordoit avec la théorie des forces centrifuges, & avec la figure allongée vers les pôles qui réſultoit des meſures actuelles.

Car cette grande queſtion de la figure de la terre dépend de la loi ſelon laquelle la peſanteur primitive agit, & il eſt certain, par exemple, que ſi cette force dépendoit d'une cauſe qui la fit tirer tantôt d'un côté & tantôt d'un autre, qui augmentât & diminuât ſans régle, la théorie ni la pratique ne pourroient jamais déterminer cette figure.

V.

Les meſures priſes par les Académiciens Français au cercle polaire & au Pérou, ont confirmé la forme applatie.

Enfin on a été obligé d'aller meſurer un dégré ſous l'équateur, & un autre ſous le cercle polaire, pour décider cette queſtion; nous avions jetté dans l'erreur, mais nous avons réparé notre faute, & les meſures des Académiciens Français ont juſtifié la théorie de M. *Newton* ſur la figure de la terre, dont l'aplatiſſement vers les pôles eſt à préſent généralement reconnu.

Les meſures priſes en Laponie & au Pérou donnent un plus grand aplatiſſement que celui qu'on vient de voir qui réſulte de

la théorie de M. *Newton*, car ces mesures donnent le rapport des axes de 173 à 174.

VI.

Deux suppositions faites par M. *Newton* en déterminant l'applatissement de la terre.

En déterminant le rapport des axes de la terre, M. *Newton* outre la gravité mutuelle des parties de la matiere, a encore supposé que la terre étoit un sphéroïde éliptique, & de plus que sa matiere étoit homogéne. M. *Clairaut*, dans son Livre de la figure de la terre, a fait voir que la premiere supposition étoit légitime, ce que M. *Newton* avoit négligé de faire, quoique cela soit fort important pour s'assurer qu'on a le vrai rapport des axes de la terre.

M. *Clairaut* a vérifié la premiere de ces suppositions, ce que M. *Newton* avoit négligé.

Il est très-possible que l'autre supposition soit fausse.

Il n'en est pas de même de la seconde supposition sur l'homogénéïté de la matiere de la terre, car il est très-possible (& M. *Newton* l'a lui-même soupçonné Prop. 20. Liv. 3.) que la matiere qui compose la terre soit d'autant plus dense qu'on approche plus du centre; or, les différentes densités des couches de matiere qui composent la terre, doivent changer la loi suivant laquelle les corps qui la composent gravitent, & altérer par conséquent le rapport de ses axes.

VII.

M. *Clairaut* a prouvé que le rapport des axes doit diminuer à mesure que la pesanteur au pôle est plus grande.

M. *Clairaut* a fait voir, dans sa théorie de la figure de la terre dont je viens de parler, que dans toutes les hypothéses les plus vraisemblables qu'on puisse faire sur la densité des parties intérieures de la terre, il y a toujours, en supposant l'attraction, une telle liaison entre la fraction qui exprime la différence des axes, & celle qui exprime la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur, que si l'une des deux fractions surpasse $\frac{1}{230}$. l'autre doit être moindre précisément de la même quantité; ensorte qu'en supposant, par exemple, que l'excès de l'équateur sur l'axe soit de $\frac{1}{173}$, ce qui est assez conforme aux mesures actuelles, on aura $\frac{1}{173} - \frac{1}{230}$ ou $\frac{1}{698}$ pour la quantité dont il faut diminuer $\frac{1}{230}$ afin d'avoir le raccourcissement total du pendule en allant du pôle à l'équateur, c'est-à-dire,

que ce raccourcissement ou, ce qui est la même chose, la diminution totale de la pesanteur, sera de $\frac{1}{230} - \frac{1}{698}$, c'est-à-dire, d'environ $\frac{1}{343}$.

Or comme toutes les expériences sur le pendule font voir que la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur, loin d'être plus petite que $\frac{1}{230}$ comme il le faudroit pour s'accorder avec cette théorie, est au contraire plus grande, il suit que les mesures actuelles ne s'accordent pas en ce point avec la théorie.

VIII.

M. *Newton* avoit tiré une conclusion toute différente.

Il ne faut pas dissimuler que M. *Newton* avoit tiré une conclusion toute différente de la supposition, que les parties de la terre étoient d'autant plus denses, qu'on approche plus du centre; il croyoit qu'en ce cas, le rapport des axes devoit augmenter.

Paroles de M. *Newton* à ce sujet, dans la deuxiéme édition des principes.

Voici comme il s'exprime pag. 386. de la deuxiéme édition des Principes : *Ce retardement du pendule à l'équateur prouve la diminution de la gravité dans ce lieu, & plus la matiere y sera légere, plus elle devra être haute afin de faire équilibre avec celle du pôle.*

En quoi il s'est trompé.

M. *Newton* croyoit que la densité augmentant vers le centre, la pesanteur augmentoit de l'équateur au pôle dans une plus grande raison que dans le cas de l'homogénéïté, ce qui est vrai. Mais il pensoit que la pesanteur à chaque point du sphéroïde étoit en raison renversée des distances au centre du sphéroïde, soit que le sphéroïde fût homogéne, ou que sa densité variât d'une maniere quelconque; d'où il avoit conclu, que dans le cas de la densité augmentée de la circonférence au centre, la pesanteur augmentant dans une plus grande raison que dans l'homogénéïté, l'aplatissement seroit plus grand, ce qui est faux ; n'étant fondé que sur une supposition qui n'a lieu que dans le sphéroïde homogéne.

IX.

Il suit de la théorie de M. *Clairaut*, qu'en admettant les suppositions qu'il fait sur l'intérieur de la terre les plus naturelles de celles

qui se présentent à l'esprit, que l'aplatissement ne peut jamais être plus grand que de 229 à 230, puisque ce rapport est celui qu'on trouve dans la supposition de l'homogénéïté de la terre, & qu'il résulte de cette théorie, que dans tous les autres cas la pesanteur augmentant, l'aplatissement doit être moindre.

X.

Quel est le poids des corps dans les différentes régions de la terre.

Après avoir déterminé le rapport des axes de la terre dans la supposition de l'homogénéïté, M. *Newton* cherche de la maniere suivante dans la Prop. 20. du Liv. 3. quel doit être le poids des corps dans les différentes régions de la terre. Puisqu'on a vû que les colonnes de matiere qui répondent au pôle & à l'équateur, étoient en équilibre lorsque leurs longueurs étoient entr'elles comme 229 à 230, & que les poids des parties égales & placées de même dans ces deux colonnes, doivent être en raison réciproque de ces colonnes, ou comme 230 à 229; on voit, par un raisonnement semblable, que dans toutes les colonnes de matiere qui composent le sphéroïde, les poids des corps doivent être en raison renversée de ces colonnes, c'est-à-dire, de leurs distances au centre: donc en supposant qu'on connoisse la distance d'un lieu quelconque de la surface de la terre au centre, on aura la pesanteur en ce lieu, & par conséquent la quantité dont la gravité augmente ou diminue en allant vers le pôle ou vers l'équateur: or comme la distance d'un lieu quelconque au centre décroît à peu près comme le quarré du sinus droit de la latitude, ainsi que l'on peut s'en convaincre par le calcul, on voit comment M. *Newton* a formé la table de la Prop. 20. du Liv. 3. où il a donné la diminution de la pesanteur depuis le pôle jusqu'à l'équateur.

X I.

La gravité étant la seule cause des oscillations des pendules, le ralentissement de ces oscillations prouve la diminution de la pesanteur, & leur accélération prouve que la gravité agit plus fortement;

Ils font en raifon des longueurs des pendules.

or on fçait, que la vîteffe des ofcillations des pendules eft en raifon inverfe de la longueur du fil auquel ils font fufpendus; donc lorfque pour rendre les vibrations d'un pendule dans une région, yfochrones à fes vibrations dans une autre, il faut le raccourcir ou l'allonger, on doit conclure que la pefanteur eft moindre ou plus grande dans cette région que dans l'autre : on connoît depuis M. *Hughens* le rapport qui eft entre la quantité dont on allonge ou raccourcit le pendule, & la diminution ou l'augmentation de la gravité ; ainfi cette quantité étant proportionnelle aux augmentations ou aux diminutions des poids, M. *Newton* a donné dans fa table les longueurs des pendules au lieu des poids.

XII.

Les dégrés de latitude font dans la même proportion.

Les dégrés de latitude diminuant dans le fphéroïde de M. *Newton* en même proportion que les poids, la même table donne la grandeur des dégrés de latitude en commençant à l'équateur où la latitude eft 0°. jufqu'au pôle où elle eft de 90°.

XIII.

Par les expériences la pefanteur eft un peu moindre vers l'équateur que la table de M. *Newton* ne la donne.

La table de M. *Newton* donne une diminution un peu moins grande de la pefanteur vers l'équateur, que celle qui réfulte des mefures actuelles, mais cette table n'eft formée que pour le cas de l'homogénéïté ; & il avertit à la fin de la Propofition où il la donne, que dans le cas où la denfité des parties de la terre croît de la circonférence au centre, il faut augmenter auffi le décrement de la pefanteur du pôle à l'équateur.

XIV.

Il attribue cette différence à la chaleur des régions de l'équateur qui allonge le pendule dans ces régions.

Mais les dernieres expérien-

Quoique M. *Newton* paroiffe porté à croire, par les obfervations qu'il rapporte dans cette même Prop. 20. fur l'allongement du pendule caufé par les chaleurs dans les régions de l'équateur, que ces différences viennent de la différente température des lieux où l'on a fait les obfervations, l'attention qu'on a eu à conferver le même dégré

dégré de chaleur par le moyen du thermométre dans les expériences qu'on a fait depuis M. *Newton* sur la longueur des pendules dans les différentes régions de la terre, prouve que ces différences ne doivent point être attribuées à cette cause, & qu'il y a réellement un décroiſſement de peſanteur du pôle à l'équateur plus grand que celui que M. *Newton* a donné dans ſa table.

ces ont fait voir que l'allongement produit par la chaleur de ces régions, ne peut cauſer ces différences.

X V.

M. *Newton* apprend à la fin de la Prop. 19. Liv. 3. à trouver le rapport des axes d'une planete quelconque dont on connoît la denſité & le tems de la révolution diurne, en ſe ſervant du rapport trouvé entre les axes de la terre pour terme de comparaiſon; car ſoit qu'une planete fut plus grande ou moindre que la terre, ſi ſa denſité étoit la même & que le tems de ſa révolution diurne fut égal à celui de la terre, il y auroit la même proportion entre la force centrifuge & ſa gravité, & par conſéquent entre ſes diamétres, que celle qu'on a trouvé pour ceux de la terre : mais ſi ſon mouvement diurne eſt plus ou moins prompt que celui de la terre dans une raiſon quelconque, la force centrifuge, & par conſéquent la différence des diamétres, ſera plus ou moins grande dans la raiſon doublée de cette viteſſe, ce qui ſuit de la théorie des forces centrifuges; & ſi la denſité de cette planete eſt plus grande ou moindre que celle de la terre dans une raiſon quelconque, la gravité ſur cette planete augmentera ou diminuera dans la même raiſon, & la différence des diamétres augmentera en raiſon de la gravité diminuée, & diminuera en raiſon de la gravité augmentée, ce qui ſuit de la théorie de l'attraction telle que M. *Newton* l'admet dans la matiere.

Méthode donnée par M. *Newton* pour trouver les axes d'une planete quelconque.

X V I.

Donc la différence des diamétres de Jupiter, par exemple, dont on connoît la révolution diurne & la denſité ſera, à ſon petit diamétre en raiſon compoſée des quarrés des tems de la révolution

Détermination des axes de Jupiter par cette méthode.

diurne de la Terre & de Jupiter, des densités de Jupiter & de la Terre, & de la différence des diamétres de la terre comparée au petit axe de la terre, c'est-à-dire, comme $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ à 1. c'est-à-dire, comme 1 à $9\frac{1}{3}$ à peu près : donc le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident est à son diamétre entre ses pôles comme $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$ à peu près. M. *Newton* ajoute qu'il a supposé dans cette détermination que la matiere qui compose Jupiter étoit d'une densité uniforme, mais que comme il est très-possible que par la chaleur du Soleil il soit plus dense vers les régions de l'équateur que vers les régions du pôle, ses diamétres peuvent être entr'eux comme 12 à 11, 13 à 12, ou même 14 à 13, & qu'ainsi sa théorie s'accorde avec les observations, puisque les observations apprennent que Jupiter est aplati, & que cet aplatissement est moindre que de $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$, & qu'il est entre 11 à 12, & 13 à 14.

XVII.

Raison bien peu vraisemblable donnée par M. *Newton*, de ce que l'applatissement de Jupiter est moindre que celui qui résulte de sa théorie.

Ce moyen que M. *Newton* prend pour expliquer un aplatissement moindre que celui que donne l'homogénéïté, paroît bien peu vraisemblable, & l'on doit être étonné qu'en expliquant l'aplatissement de Jupiter, il ait eu recours à une cause dont l'effet seroit bien plus sensible sur la Terre que sur Jupiter, puisque la Terre est beaucoup plus près du Soleil que Jupiter.

S'il avoit connu la Proposition de M. *Clairaut*, je veux dire, que la densité augmentant au centre l'aplatissement diminue, il auroit trouvé une cause toute naturelle du Phénoméne qu'il vouloit expliquer, en supposant Jupiter plus dense au centre qu'à sa superficie, ce qui est une hypothése qui s'accorde avec toutes les loix de la méchanique.

XVIII.

Dans la premiere édition des principes, M. *Newton* avoit donné à Jupiter

Dans la premiere édition des Principes, M. *Newton* n'avoit pas fait entrer la densité dans la proportion des diamétres de Jupiter, & il avoit conclu le rapport de ses axes de 40 à 39. en n'y faisant

entrer que la révolution diurne, & le rapport des axes de la terre.

un aplatissement beaucoup moindre, & pourquoi?

XIX.

Pourquoi on ne peut connoître la proportion des axes que de Jupiter, de la terre & du Soleil.

Comme ce n'est que dans la Terre, Jupiter, & le Soleil qu'on connoît à la fois les deux élémens nécessaires pour déterminer les axes, c'est-à-dire la révolution diurne, & la densité, on ne peut connoître le rapport des axes que de ces trois corps célestes. On vient de voir celui des axes de la Terre & de Jupiter; le rapport des axes du Soleil se trouveroit en prenant la raison composée du quarré de $27\frac{1}{2}$ à 1, de la densité de la Terre à celle du Soleil, & de 229 à 230: ce qui donneroit, pour le rapport des axes du Soleil, une quantité beaucoup trop petite pour pouvoir être observée.

La proportion des axes du Soleil est trop médiocre pour pouvoir être sensible.

CHAPITRE QUATRIÉME.

Comment M. Newton a expliqué la précession des Equinoxes.

I.

On a cru longtems que l'axe de la terre conservoit toujours son parallélisme.

On a supposé longtems que l'axe de la terre gardoit toujours la même position pendant qu'elle fait sa révolution dans son grand orbe, & cette supposition étoit bien simple: car la théorie fait voir que ce parallélisme doit résulter des deux mouvemens qu'on connoît à la terre, je veux dire le mouvement annuel & le mouvement diurne; & effectivement ce parallélisme se conserve sensiblement pendant un assez longtems.

Mais la continuité & l'exactitude des observations, ont fait découvrir que les pôles de la terre ne répondoient pas toujours aux mêmes fixes, & que par conséquent son axe ne restoit pas toujours paralléle à lui-même.

II.

Hipparque s'eſt apperçu le premier de la révolution des pôles de la terre.

Hipparque fut le premier, au rapport de *Ptolomée*, qui ſoupçonna le mouvement de l'axe de la terre. *Ptolomée* examina ce ſoupçon d'*Hipparque*, & l'ayant vérifié, il fixa ce mouvement à un dégré en cent ans, ce qui donnoit 36500 ans pour la révolution entiere de la ſphére des étoiles fixes, qu'il ſuppoſoit être la cauſe de cette apparence; & on croyoit du tems de *Ptolomée* qu'aprés cette révolution, qu'on appelloit *la grande année*, tous les corps céleſtes retournoient à leur premiere poſition.

Ptolomée a fixé la durée de cette révolution.

On appelloit cette révolution du tems de Ptolomée, la grande année.

Ulughbeig Arabe corrigea le tems que Ptolomée avoit déterminé pour la révolution des Pôles de la terre.

Les Arabes s'apperçurent que *Ptolomée* avoit fait ce mouvement plus lent qu'il ne l'eſt en effet, *Ulughbeig* le fit d'un dégré en 72 ans, & les Aſtronomes du dernier ſiécle en le fixant à 51″ environ par an, ont confirmé la découverte d'*Ulughbeig*; ainſi cette révolution des pôles de la Terre n'eſt que de 25920 années.

Les Aſtronomes des derniers tems l'ont trouvée comme Ulughbeig de 51″ par an, & qu'elle s'acheve en 25920 ans.

III.

Ce mouvement de l'axe de la terre fait rétrograder les points équinoctiaux, & c'eſt ce qu'on appelle la préceſſion des équinoxes.

Les points équinoctiaux changent en même tems & de la même quantité que les pôles du monde, & c'eſt ce mouvement des points équinoctiaux qui s'appelle *la préceſſion des équinoxes.*

IV.

Et cette régreſſion cauſe un mouvement apparent dans les étoiles fixes.

Quoique les étoiles fixes ſoient immobiles, du moins pour nous, comme la commune interſection de l'équateur & de l'écliptique rétrograde, il eſt néceſſaire que les étoiles qui répondent à ces points paroiſſent changer continuellement, & qu'elles paroiſſent avancer vers l'Orient; d'où il arrive que leurs longitudes, qu'on a coutume de compter dans l'écliptique du commencement d'*Aries*, c'eſt-à-dire, du point d'interſection de l'équateur & de l'écliptique au printems, augmentent continuellement, & les fixes paroiſſent avancer *en conſéquence*; mais ce mouvement n'eſt qu'apparent & vient de la régreſſion en ſens contraire du point de l'équinoxe du printems.

V.

Cette régreſſion eſt la cauſe pour laquelle toutes les conſtellations du zodiaque ont changé de place depuis les obſervations des premiers Aſtronomes. Car la conſtellation d'*Aries*, par exemple, qui au tems d'*Hipparque* répondoit à l'interſection de l'équateur & de l'écliptique au printems, & qui a donné ſon nom à cette portion de l'écliptique, eſt à préſent dans le ſigne du *Taureau*, le *Taureau* eſt dans les *Gémeaux*, &c. ainſi elles ont pris la place l'une de l'autre ; mais les parties de l'écliptique où elles étoient placées autrefois, ont toujours retenu le même nom qu'elles avoient du tems d'*Hipparque*.

Elle eſt cauſe que l'interſection de l'écliptique & de l'équateur ne répond plus aux mêmes étoiles, & que les conſtellations du Zodiaque ont changé de place.

V I.

On ignoroit avant M. *Newton* la cauſe phyſique de la préceſſion des équinoxes, & on va voir comment il a déduit ce mouvement, de ſes principes ſur la gravitation.

On a vu dans le Chapitre de la figure de la terre, que cette figure eſt celle d'un ſphéroïde aplati vers les pôles & élevé vers l'équateur.

M. *Newton* pour expliquer la préceſſion des équinoxes, commence par donner trois Lemmes dans ſon troiſiéme Livre, pour préparer à la démonſtration qu'il donne dans la Prop. 39. de ce troiſiéme Livre, que cette révolution des points équinoctiaux eſt cauſée par l'attraction réunie du Soleil & de la Lune ſur la protubérance de la terre à l'équateur.

Lemmes d'où M. *Newton* part pour trouver ce mouvement.

V I I.

Il ſuppoſe dans le premier de ces Lemmes, que toute la matiere dont la terre conſidérée comme un ſphéroïde excéderoit le globe inſcrit à ce ſphéroïde, ſoit reduite à un ſeul anneau qui envelopperoit l'équateur, & il prend la ſomme de tous les efforts du Soleil ſur cet anneau, pour le faire tourner autour de l'axe qui eſt la commune ſection du plan de l'écliptique avec le plan qui paſſeroit par

le centre de la Terre, & feroit perpendiculaire à la droite tirée de ce centre à celui du Soleil. Il cherche dans le fecond Lemme le rapport qui eſt entre la fomme de toutes ces forces, & la fomme de celles que le Soleil exerce fur toute la partie de la terre qui environne le globe. Dans le troifiéme il compare la quantité de mouvement de cet anneau placé à l'équateur, avec celle de toutes les parties de la Terre.

VIII.

Pour déterminer la force du Soleil fur cette protubérance de l'équateur de la terre, M. *Newton* prend pour hypothéfe, que fi la terre étoit annihilée, & qu'il ne reftât que cet anneau qui décrivît feul autour du Soleil l'orbe annuel, & qui tournât en même tems par le mouvement diurne autour de fon axe incliné à l'écliptique de $23^{\circ}\frac{1}{2}$, le mouvement des points équinoctiaux feroit le même, foit que cet anneau fût fluide, foit qu'il fût compofé de matiere folide.

M. *Newton*, après avoir cherché en quel rapport la matiere de cet anneau fuppofé, c'eſt-à-dire, de la protubérance de l'équateur, eſt à toute la matiere qui compofe la terre, & avoir trouvé, en prenant le rapport des axes de la terre de 229 à 230, que cette matiere eſt à celle de la terre, comme 459 à 52441, fait remarquer que fi la terre & cet anneau tournoient enfemble autour du diamétre de cet anneau, le mouvement de l'anneau feroit au mouvement du globe intérieur, c'eſt-à-dire, au mouvement de la terre autour de fon axe, comme 4590 à 485223; & que par conféquent le mouvement de l'anneau feroit à la fomme du mouvement de l'anneau & du globe, dans la raifon de 4590 à 489813.

Il avoit trouvé Prop. 32. du 3e Liv. que le moyen mouvement des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire, eſt de $20^{\circ}, 11', 46''$ *en antécédence* dans une année fidérale; & il avoit remarqué dans le Cor. 16. de la Prop. 66. que s'il y avoit plufieurs Lunes, le mouvement des nœuds de chacune de ces Lunes feroit comme leurs tems périodiques. Delà il conclut que le mouvement des nœuds

d'une Lune qui feroit sa révolution près la surface de la terre en $23^h\ 56'$, seroit à $20^\circ\ 11'\ 46''$, qui est le mouvement des nœuds de notre Lune dans une année, comme $23^h\ 56'$, qui est la révolution diurne de la terre, à 27 jours $7^h\ 43''$, qui est le tems périodique de la Lune, c'est-à-dire, comme 1436 à 39343; & ce seroient les mêmes proportions selon les Cor. de la Prop. 66. pour les nœuds d'un assemblage de Lunes qui entoureroit la terre, soit que ces Lunes ne fussent pas contigues, soit qu'elles le devinssent en supposant qu'elles se liquefiassent, & qu'elles formassent un anneau continu & fluide, soit enfin que cet anneau se durcit & devint inflexible.

M. Newton considére la protubérance de la terre à l'équateur, comme un anneau de Lunes adhérent au globe de la terre.

Il tire de cette supposition la maniere dont l'attraction du Soleil sur l'élévation de la terre à l'équateur cause la précession des équinoxes.

Donc, en considérant l'élévation de la terre à l'équateur comme un anneau de Lunes adhérent à la terre, & révoluant avec elle, puisque la révolution des nœuds d'un tel anneau est à celle des nœuds de la Lune, comme 1436 à 39343, selon le Cor. 16. de la Prop. 66. & que le mouvement de l'anneau est à la somme des mouvemens de l'anneau & du globe auquel il adhére, comme 4590 à 489813, par la Prop. 39. du Liv. 3. le mouvement annuel des points équinoctiaux d'un corps composé de l'anneau & du globe auquel il adhére, seroit au mouvement annuel des nœuds de la Lune, c'est-à-dire, à $20^\circ\ 11'\ 46''$, en raison composée des deux raisons ci-dessus trouvées, c'est-à-dire, comme 100 à 292369.

Mais M. *Newton* a trouvé dans le Lemme 2. du troisiéme Liv. que nous venons de citer, que si la matiere de l'anneau supposé étoit répandue sur toute la superficie du globe pour produire vers l'équateur la même élévation que celle de l'équateur de la terre, la force de toutes les particules de cette matiere pour mouvoir la terre, seroit moindre que celle de l'anneau supposé à l'équateur dans la raison de 2 à 5: il faut donc que la régression annuelle des points équinoctiaux ne soit à celle des nœuds de la Lune, que comme 10 à 73092, & par conséquent elle seroit de $9''\ 56'''\ 50^{iv}$ dans une année sidérale, sans l'inclinaison de l'axe à l'écliptique, laquelle fait que ce mouvement doit encore être diminué en raison du cosinus de cette inclinaison (qui est

de 23° ½) au rayon. Ce mouvement ne doit donc être que de 9″ 7‴ 20ⁱᵛ, & cela en ne considérant que l'action du Soleil.

I X.

Quantité dont l'action du Soleil contribue, suivant M. *Newton*, à la régression des points équinoctiaux.

M. *Newton* donne ainsi la quantité moyenne du mouvement des points équinoctiaux. Mais ce n'est pas sans examiner les différentes variétés de l'action du Soleil sur la protubérance de la terre à l'équateur, toujours en employant la considération de cet anneau.

Il fait voir dans les Cor. 18. 19. & 20. de la même Prop. 66. que par l'action du Soleil les nœuds d'un anneau qui seroit supposé entourer un globe comme la terre, seroient en repos dans les sysigies, qu'ils se mouvroient en *antécédence* dans les autres lieux, & qu'ils iroient le plus vîte dans les quadratures, que l'inclinaison de cet anneau varieroit, que son axe oscilleroit pendant chaque révolution annuelle du globe, qu'au bout de chaque révolution il reviendroit à sa premiere position, mais que ses nœuds ne reviendroient pas au même lieu, & qu'ils iroient toujours en *antécédence*.

X.

La plus grande inclinaison de l'anneau doit se trouver lorsque ses nœuds sont dans les sysigies, ensuite dans le passage des nœuds aux quadratures cette inclinaison diminuera, & par l'effort que fait alors l'anneau pour changer son inclinaison, il imprime un mouvement au globe, & ce globe doit retenir ce mouvement jusqu'à ce que l'anneau ou la protubérance de l'équateur (car c'est la même chose suivant M. *Newton*) par un effort contraire le lui ôte, & lui en imprime un nouveau dans le sens opposé.

Cette action du Soleil sur la protubérance à l'équateur, doit causer la nutation annuelle de l'axe de la Terre.

On voit par-là que l'axe de la terre doit changer sa position par rapport à l'écliptique, deux fois dans son cours annuel, & revenir deux fois à la même position.

X I.

A chaque révolution de la Lune autour de la terre, l'axe de la

la terre doit éprouver une pareille nutation, c'est-à-dire, qu'à chaque mois périodique de la Lune, l'axe de la terre doit éprouver les mêmes variations que dans son orbe annuel.

L'axe de la terre doit aussi chaque mois une nutation par l'action de la Lune.

XII.

M. *Newton* a fait voir dans le Cor. 21. de la Prop. *66*. que l'exubérance de la matiere de la terre vers l'équateur faisant rétrograder les nœuds, plus cet excès de matiere vers l'équateur seroit grand, plus cette régression seroit grande, & qu'elle doit diminuer quand cette protubérance diminue ; ainsi s'il n'y avoit aucune élévation vers l'équateur, la régression des nœuds n'auroit pas lieu, & les nœuds d'un globe, qui au lieu d'être élevé à l'équateur y seroit abaissé, & qui auroit par conséquent sa matiere protubérante vers les pôles, se mouvroient en *conséquence*.

Si la terre étoit élevée vers les pôles au lieu de l'être à l'équateur, les points équinoctiaux avanceroient au lieu de rétrograder.

XIII.

Et dans le Cor. 22. de la même Prop. *66*. il ajoute, que par la même raison que la forme du globe fait juger du mouvement des nœuds, aussi on peut conclure du mouvement des nœuds la forme du globe ; & par conséquent, si les nœuds vont en *antécédence*, le globe sera élevé vers l'équateur, & il y sera abaissé au contraire, s'ils vont en *conséquence*, ce qui est encore une preuve de l'aplatissement de la terre vers les pôles.

Ce qui prouve l'aplatissement des pôles de la terre.

XIV.

On n'a considéré jusqu'à présent que l'action du Soleil en expliquant la précession des équinoxes, & on a vu que par cette action les points équinoctiaux ne feroient que $9'' \; 56''' \; 54^{iv}$ en une année. Mais la Lune agit sur la terre par sa gravité, & cette action est très-sensible dans le phénoméne que nous examinons ici. M. *Newton* trouve, par sa théorie, que l'action de la Lune sur les points équinoctiaux, est à celle du Soleil comme 4. 4815. à 1. environ ; & en suivant cette proportion, on trouve que la Lune fait

Que la Lune contribue au mouvement des points équinoctiaux.

Que l'action de la Lune sur l'élévation de la terre à l'équateur, est plus puissante que celle du Soleil.

Et en quelle proportion.

Quantité totale dont les actions du Soleil & de la Lune, font rétrograder, selon la théorie de M. *Newton*, les points équinoctiaux dans une année.

rétrograder les nœuds dans le tems d'une révolution dans le grand orbe de 40″ 52‴ 54^{iv}, & que par conséquent la précession annuelle des équinoxes, causée par les deux forces réunies de la Lune & du Soleil, est de 50″ 0‴ 12^{iv}, ce qui est à peu près, comme on voit, la quantité dont les meilleurs observateurs l'ont déterminée.

X V.

Cette quantité s'accorde avec celle qui a été déterminée par les observations.

Ainsi les points équinoctiaux après une révolution entiere de la terre dans le grand orbe, au lieu de revenir au même point, s'en éloignent de 51″ environ, & ils ne reviennent à ce même point qu'aprés avoir parcouru le cercle entier, ce qui compose leur révolution de 25920 années, comme on l'a dit ci-dessus.

X V I.

Quelque Astronomes ont soupçonné que l'angle que l'axe de la terre fait avec l'écliptique diminuoit continuellement.

Quelques Astronomes ont soupçonné qu'indépendament de la nutation de l'axe de la terre dont j'ai parlé, & par laquelle son inclinaison à l'écliptique change & se rétablit deux fois chaque année, cet axe s'éloignoit continuellement de l'écliptique par un mouvement imperceptible. Et l'on ne sçait pas si le mouvement des nœuds, celui des apsides, l'excentricité de la terre, celle de la Lune, les actions des autres planetes sur la terre, tous élémens qui n'entrent point dans la détermination des changemens qui arrivent dans la position de l'axe de la terre pour causer la précession des équinoxes, ne pourroient apporter quelque changement dans l'angle que l'axe de la terre fait avec l'écliptique.

Elémens qui peuvent entrer dans la cause de cette diminution.

X V I I.

Le Chevalier de *Louville* croyoit que cette diminution étoit d'une minute en cent ans.

Le Chevalier de *Louville* prétendoit que cet angle diminuoit d'une minute en cent ans, & l'opinion de cette diminution paroît justifiée par les différences qui se trouvent entre les observations que d'habiles Astronomes ont fait de cette obliquité. Mais on est bien loin de pouvoir prononcer en faveur de ce savant. Car si cette diminution de l'angle que fait l'axe de la terre avec l'écliptique

a lieu, on ſent, par la lenteur dont elle s'opére, qu'il faut un plus grand nombre d'obſervations que celui qu'on a juſqu'à préſent. Et dans les choſes qui dépendent de différences ſi fines, on ne peut rien ſtatuer ſur les obſervations des Aſtronomes qui ont précédé la perfection qu'on a donné aux inſtrumens aſtronomiques dans le dernier ſiécle.

On ne pourra rien décider ſur ce mouvement ſoupçonné dans l'axe de la terre, que lorſqu'on en aura un très-grand nombre d'obſervations très-exactes.

CHAPITRE V.

Du flux & reflux de la mer.

I.

On ſent aiſément quelle liaiſon doit avoir le flux & le reflux de la mer avec la préceſſion des équinoxes. M. *Newton* déduit ſon explication du flux & reflux des mêmes Cor. de la Prop. 66. d'où l'on a vû qu'il a tiré ſon explication de la préceſſion des équinoxes; ces deux phénoménes ſont, l'un & l'autre, une ſuite néceſſaire des attractions de la Lune & du Soleil ſur les parties qui compoſent la terre.

L'explication du flux & du reflux ſe tire comme celle de la préceſſion des équinoxes de la Prop. 66. du premier Livre des Principes & de ſes Corolaires.

II.

Galilée penſoit que les phénoménes des marées pouvoient s'expliquer par le mouvement de rotation de la terre, & par ſon mouvement de tranſlation autour du Soleil. Mais ſi ce grand homme avoit fait plus d'attention aux circonſtances qui accompagnent le flux & le reflux, il auroit vû que par le mouvement diurne les eaux doivent à la vérité s'élever vers l'équateur, ce qui doit faire prendre à la terre la forme d'un ſphéroïde déprimé vers les pôles, mais que jamais ce mouvement rotatoire ne pourroit cauſer aux eaux de la mer aucun mouvement de réciprocation, ainſi que M. *Newton* l'a démontré Cor. 19. Prop. 66. M. *Newton* fait voir auſſi dans ce même Cor. en employant ce qu'il a démontré dans les

Erreur de *Galilée* ſur les cauſes du flux & reflux.

Cor. 5. & 6. des loix du mouvement, que la translation de la terre dans son grand orbe ne doit rien changer à tous les mouvemens qui s'éxécutent à sa surface, & que par conséquent le mouvement translatif de la terre autour du Soleil, ne peut causer le mouvement de flux & de reflux qu'ont les eaux de la mer.

I I I.

Le flux & le reflux sont une suite de l'action du Soleil & de la Lune sur les eaux de la mer.

M. *Newton* a fait voir que c'est par leur attraction que le Soleil & la Lune agissent sur la mer.

Il étoit aisé de s'appercevoir, en faisant attention aux circonstances qui accompagnent le flux & le reflux, que ces phénoménes dépendent de la position de la terre par rapport au Soleil & à la Lune, mais il ne l'étoit pas de connoître la maniere dont ces deux astres les produisent, & la quantité dont chacun y contribue. On ne voit que les effets dans lesquels ces actions sont tellement confondues, que sans les principes de M. *Newton* on n'auroit pû parvenir à les démêler l'une de l'autre, ni à assigner leur quantité. Il étoit réservé à ce grand homme de trouver les véritables causes du flux & du reflux, & de soumettre ces causes au calcul. Voici le chemin qu'il a suivi pour y parvenir.

I V.

Chemin qu'il a suivi pour parvenir à assigner la quantité dont chacun de ces astres contribue à ces Phénoménes.

Il commence par examiner dans la Prop. *66.* les principaux phénoménes qui doivent résulter du mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré des distances, les petits tournans autour du plus grand.

Après avoir vû dans les 17 premiers Cor. de cette Prop. quels sont, dans un tel systême, les dérangemens que doit causer le plus grand corps dans le mouvement du plus petit qui tourne lui-même autour du troisiéme, & donné par ce moyen les fondemens de la théorie de la Lune, il considére dans le Cor. 18. plusieurs corps fluides qui tournent autour du troisiéme, & il suppose ensuite que ces corps fluides deviennent contigus & forment un anneau qui tourne autour du corps qui lui sert de centre, & il fait voir que cet anneau doit subir dans son mouvement, par l'action du plus

grand corps, les mêmes dérangemens que le corps unique dont il ſuppoſe que cet anneau a pris la place ; enfin Cor. 19. il ſuppoſe que le corps autour duquel tourne cet anneau s'étende juſqu'à lui, que ce corps qui eſt ſolide contienne l'eau de cet anneau dans un canal creuſé autour de lui, & qu'il tourne autour de ſon axe d'un mouvement uniforme, & il fait voir qu'alors le mouvement de l'eau contenue dans ce canal, ſera accéleré & retardé tour à tour par l'action du plus grand corps, & que ce mouvement ſera plus prompt dans les ſyſigies de cette eau, & plus lent dans ſes quadratures, & enfin que cette eau devra éprouver un flux & reflux comme notre mer.

Dans la Prop. 24. du Liv. 3. M. *Newton* applique cette Prop. *66.* & ſes Cor. aux phénoménes de la mer, & il y fait voir qu'ils ſont une ſuite de l'attraction combinée du Soleil & de la Lune ſur les parties qui compoſent la terre.

V.

Il cherche enſuite à déterminer la quantité dont chacun de ces aſtres contribue à ces phénoménes. Comme cette quantité dépend de leurs diſtances à la terre, plus ils en ſont près, plus les marées doivent être grandes, toutes choſes égales quand leurs actions conſpirent : & ſuivant le Cor. 14. de la Prop. *66.* ces effets doivent être en raiſon triplée des diamétres apparens de ces aſtres.

Proportions trouvées par M. *Newton*, pour déterminer cette quantité.

M. *Newton* démontre Prop. 25. Liv. 3. que la force qui porte la Lune vers le Soleil eſt à la force centripéte qui porte la Lune vers la terre, en raiſon doublée des tems périodiques de la terre autour du Soleil, & de la Lune autour de la terre, c'eſt-à-dire, comme 1 à $178\frac{29}{40}$. ſelon le Cor. 17. de la Prop. *66.* d'où il conclut que la force centripéte des parties de la terre vers le Soleil qui eſt proportionnelle au rayon de la terre, eſt à la force centripéte de la Lune vers la terre, en raiſon directe du rayon de la terre au rayon de l'orbe de la Lune, & en raiſon inverſe doublée du tems périodique de la terre autour du Soleil, au tems périodique de la Lune autour

de la terre ; ainſi la force du Soleil pour troubler le mouvement des corps près de la ſurface de la terre eſt à la force avec laquelle il trouble les mouvemens de la Lune, comme le rayon de la terre eſt au rayon de l'orbe de la Lune, c'eſt-à-dire, comme 1 à 60 $\frac{1}{2}$. mais par cette même Prop. 25. Liv. 3. la force du Soleil ſur la Lune pour altérer ſes mouvemens dans les quadratures, eſt à la gravité à la ſurface de la terre comme 1 à 638092, 6 ; d'où M. *Newton* tire, Prop. 36. Liv. 3. que puiſque ces forces en deſcendant à la ſurface de la terre diminuent dans la raiſon de 60 $\frac{1}{2}$ à 1. la force du Soleil pour déprimer les eaux de la mer dans les quadratures, c'eſt-à-dire à 9°. ſera à la force de la gravité à la ſurface de la terre, comme 1 à 38604600 ; mais cette force eſt double dans les ſyſigies de ce qu'elle eſt dans les quadratures, & de plus agit dans un ſens oppoſé, c'eſt-à-dire, pour élever les eaux ; la ſomme de ces deux forces du Soleil ſur les eaux de la mer dans les quadratures & les ſyſigies, ſera donc à la force de la gravité, comme 3 à 38604600, ou comme 1 à 1286200 : ces deux forces réunies compoſent la force totale du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer, car on peut conſidérer leur effet comme ſi elles étoient toutes employées à élever les eaux dans les ſyſigies, & qu'elles n'euſſent aucun effet dans les quadratures.

V I.

Mais ce n'eſt là la force du Soleil ſur les eaux de la mer, qu'en ſuppoſant le Soleil dans le zenith du lieu qu'on conſidére, & dans ſa moyenne diſtance à la terre.

Maniere d'évaluer l'action du Soleil ſur les eaux de la mer, dans un lieu quelconque.

Or dans un lieu quelconque le plus grand abaiſſement & la plus grande élévation de l'eau cauſés par l'action du Soleil, ſont en raiſon directe du ſinus verſe du double de la hauteur du Soleil ſur l'horiſon, & en raiſon triplée inverſe de la diſtance du Soleil à la terre.

L'élévation & la dépreſſion des eaux diminuent peu à peu à meſure que le Soleil s'éléve de l'horiſon ou s'abaiſſe vers lui, & elles s'opérent plus lentement quand le Soleil commence à abandonner

le point de sa culmination & de l'horison ; mais quand il est vers le milieu de ces deux points extrêmes, alors le mouvement de l'eau est le plus vîte.

VII.

On a vû ci-dessus que par le calcul de M. *Newton*, la force du Soleil sur les eaux de la mer est à la force de la gravité ici-bas, comme 1 à 12868200 ; & on a vû dans le Chapitre qui traite de la figure de la terre, que la force centrifuge acquise par la révolution de la terre sur son axe étant à la gravité comme 1 à 289, cette force éleve l'équateur de 85472 pieds de Paris : donc puisque la force du Soleil est à la force centrifuge sous l'équateur, comme 289 à 12868200, ou comme 1 à 44527, cette force élévera l'eau aux régions sous le Soleil, & opposées au Soleil de deux pieds de Paris environ.

M. *Newton* conclut de sa théorie que le Soleil éléve l'eau de la mer de deux pieds.

VIII.

Quant à la force de la Lune pour élever l'eau de la mer, on ne peut la conclure que par les phénoménes qui accompagnent les marées ; & M. *Newton* a employé pour la déterminer, la comparaison des plus grandes & des moindres hauteurs des marées dans les sysigies & dans les quadratures : car dans les sysigies leur plus grande hauteur est l'effet de la somme des forces du Soleil & de la Lune, & dans les quadratures leur moindre hauteur est l'effet de la différence de ces forces.

Comment M. *Newton* est parvenu à évaluer l'action de la Lune dans les marées.

M. *Newton* se sert pour cette détermination, des observations faites par *Sturminus* au-dessous de Bristol. Cet Auteur rapporte qu'au Printems & à l'Automne l'eau dans la conjonction & l'opposition du Soleil & de la Lune monte environ à 45 pieds, & que dans les quadratures elle ne monte qu'à 25.

Or, la premiere hauteur est produite par les forces réunies du Soleil & de la Lune, & la derniere par leur différence ; donc la somme des forces du Soleil & de la Lune sur la mer, lorsque ces deux astres sont dans l'équateur & dans leur moyenne distance

à la terre, est à leur différence, comme 45 à 25, ou comme 9 à 5.

Les diamétres de l'orbe dans lequel la Lune se mouveroit sans égard à son excentricité, ont été trouvés Prop. 28. Liv. 3. par M. *Newton* dans la raison de 69 à 70 : donc la distance de la Lune à la terre dans les sysigies est à sa distance dans les quadratures, comme 69 à 70, toutes choses d'ailleurs égales ; mais les forces de la Lune pour mouvoir la mer, sont par le Cor. 14. de la Prop. 66. en raison triplée inverse de ses distances à la terre, d'où M. *Newton* tire que la hauteur de l'eau causée par la somme des forces du Soleil & de la Lune, étant à leur hauteur causée par la différence de ces forces, comme 9 à 5, la force du Soleil sur les eaux de la mer est à celle de la Lune, comme 1 à $4\frac{1}{2}$ environ. Or on vient de voir que la force du Soleil sur la mer est à la force de la gravité ici-bas, comme 1 à 12868200 : donc la force de la Lune sur la mer sera à la force de la gravité, comme 1 à 12871400 ; & puisque la force du Soleil éléve l'eau à la hauteur de deux pieds environ, la Lune l'élévera à neuf pieds environ, (on prend les nombres ronds) & ces deux forces réunies la feront monter, selon M. *Newton*, environ à 10 p. $\frac{1}{2}$, ce qui même pourra aller à 12 pieds lorsque la Lune sera dans son périgée. M. *Newton* ajoute, Prop. 37. Liv. 3. qu'une telle force suffit pour produire toutes les marées, & qu'elles y répondent assez exactement, surtout aux rivages qui sont fort voisins de la grande mer, & où elle peut s'élever & s'abbaisser sans qu'aucune cause externe altére ses mouvemens.

Cette action est à celle du Soleil, comme 4 & demi à 1.

Les deux forces réunies du Soleil & de la Lune élevent l'eau à 10 p. & demi, & même à 12 p. lorsque la Lune est dans son périgée.

I X.

M. Bernoulli croit que ces forces sont beaucoup plus grandes, que ne les fait M. *Newton*.

M. *Daniel Bernoulli* dans sa Dissertation sur les marées, qui a remporté le prix de l'Académie de l'an 1738. pense que les forces absolues du Soleil & de la Lune pour causer les marées, sont beaucoup plus grandes que M. *Newton* ne les suppose ; & au lieu de regarder à son exemple la terre comme composée de parties homogénes, il s'imagine que la densité des couches de la terre augmente

augmente de la circonférence au centre, ce qui eſt très-probable par pluſieurs raiſons phyſiques, & il prétend que par cette ſuppoſition on peut augmenter les forces du Soleil & de la Lune ſur la mer autant que les phénoménes le requéreront.

X.

Ce qui a déterminé M. *Bernoulli* à s'éloigner en cela du ſentiment de M. *Newton*, c'eſt que par la théorie qu'il a donnée dans ſa piéce de 1738. il trouve dans l'hypothéſe de l'homogénéïté des parties de la terre que le Soleil ne peut élever les eaux de plus de deux pieds, & la Lune de plus de cinq : or ces deux forces combinées enſemble ne composeroient dans les quadratures qu'une force abſolue capable de faire varier les eaux en pleine mer d'une hauteur verticale de trois pieds pendant une marée, ce qui lui paroît inſuffiſant pour expliquer tous les phénoménes des marées dans les quadratures.

Ce qui a déterminé M. *Bernoulli* à s'éloigner en cela du ſentiment de M. *Newton*.

M. *Bernoulli* ajoute que les hauteurs des marées dans les ports où l'on fait les obſervations, dépendent de tant de circonſtances accidentelles, qu'elles ne peuvent être exactement proportionnelles aux hauteurs des marées dans la pleine mer; c'eſt ce qui fait que l'on trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites marées, très différens dans les différens ports. Il en rapporte pour exemple une obſervation qu'on lui envoya de S. Malo lorſqu'il compoſoit ſa diſſertation ; la plus grande & la plus petite hauteur de l'eau étoient entr'elles par cette obſervation, comme 10 à 3, & par l'obſervation de *Sturmius* au-deſſous de Briſtol, elles n'étoient entr'elles que comme 9 à 5 ; cependant c'eſt ſur cette obſervation de *Sturmius*, que M. *Newton* a déterminé le rapport entre les forces du Soleil & de la Lune pour opérer les marées; & M. *Bernoulli* prétend qu'outre ces différences qui ſe trouvent entre les obſervations des plus grandes & des moindres hauteurs des marées dans les différens ports, la méthode d'eſtimer les forces qui les cauſent par ces plus grandes & ces moindres hauteurs, eſt encore

très fautive en ce que les marées sont des espéces d'oscillations qui se ressentent toujours des oscillations précédentes, ce qui diminue les variations des marées ; d'où M. *Bernoulli* conclut qu'il seroit plus sûr d'évaluer les forces respectives du Soleil & de la Lune sur les marées par leur durée & leurs intervales que par leurs hauteurs, & en se servant de cette méthode, il trouve que la force de la Lune est dans une moindre proportion à celle du Soleil que celle que M. *Newton* a trouvé.

M. *Bernoulli* prétend qu'il seroit plus sûr d'évaluer les forces du Soleil & de la Lune par la durée & l'intervale des marées, que par leurs hauteurs.

On doit d'abord être étonné que la force de l'attraction du Soleil sur la terre étant assez puissante pour la forcer à tourner autour de lui, tandis que celle de la Lune cause dans son orbite des altérations à peine sensibles, cependant la Lune ait beaucoup plus d'influence que le Soleil sur les mouvemens de la mer. Mais si l'on fait attention que les mouvemens de la mer viennent de ce que ses parties sont attirées différemment de celles du reste du globe, parce que leur fluidité fait qu'elles cédent beaucoup plus facilement aux causes qui agissent sur elles, on verra que l'action du Soleil, qui est très forte sur la terre entiere, attire toutes ses parties presque également à cause de sa grande distance de la terre, au lieu que la Lune étant beaucoup plus près de la terre, doit agir plus inégalement sur les différentes parties de notre globe, & que cette inégalité doit être beaucoup plus sensible.

Comment il se peut faire que l'attraction de la Lune ait tant d'influence sur les eaux de la mer, & dérange si peu le mouvement de la Terre.

Après avoir fait voir que l'attraction combinée du Soleil & de la Lune sur les eaux de la mer, est la cause des marées, & avoir déterminé la quantité dont chacun de ces deux astres y contribue, M. *Newton* entre dans l'explication des circonstances qui accompagnent les phénoménes de la mer.

On a reconnu de tout tems trois especes de mouvement dans la mer, son mouvement journalier qui fait qu'elle s'éleve & s'abaisse deux fois par jour, les altérations réguliéres que reçoit ce mouvement à chaque mois, & qui suivent les positions où se trouve la Lune par rapport à la terre, & enfin celles qui ont lieu chaque année, & qui sont causées par la plus grande proximité où la terre est du Soleil dans de certains tems de l'année.

On distingue trois sortes de variations dans le mouvement de la mer.

La circonſtance la plus remarquable qui accompagne les marées, c'eſt que l'élévation & l'abaiſſement des eaux arrivent toujours deux fois dans un jour lunaire, c'eſt-à-dire, dans l'intervale de tems qui s'écoule entre le paſſage de la Lune au méridien, & ſon retour au même méridien; car la plus grande force de cet aſtre ſur la mer ayant lieu lorſqu'il culmine, & que ſon action eſt perpendiculaire, elle doit être égale deux fois dans 24^h quand la Lune paſſe au méridien du lieu au-deſſus & au-deſſous de l'horiſon; ainſi il doit y avoir à chaque révolution de la Lune autour de la terre deux flux diſtans entr'eux, du même intervale de tems que la Lune employe à aller du méridien de deſſus l'horiſon à celui de deſſous, & cet intervale eſt de $12^h\ 24'$.

Les variations diurnes s'abaiſſent & s'élevent deux fois par jour.

Cette élévation & cette dépreſſion des eaux deux fois en 24^h, ſuit de ce que M. *Newton* a démontré Cor. 19. & 20. Prop. 66. car cette eau ſe trouve deux fois dans cet eſpace de tems dans ſes ſyſigies, & deux fois dans ſes quadratures; ainſi ſon mouvement doit être deux fois accéléré, & deux fois retardé.

XIII.

La plus grande élévation de l'eau devroit être précisément dans le mouvement du paſſage de la Lune au méridien, ſi les eaux étoient ſans inertie, & qu'elles n'éprouvaſſent aucun frottement du lit dans lequel elles coulent; mais ces deux raiſons font que cette hauteur arrive ordinairement deux heures & demie ou trois heures après le paſſage de la Lune au méridien dans les ports de l'océan où la mer eſt libre: c'eſt que l'inertie de l'eau fait qu'elle ne reçoit pas tout d'un coup le mouvement, & qu'elle conſerve pendant quelque tems le mouvement acquis, enſorte que le mouvement de la mer eſt perpétuellement accéléré pendant les ſix heures qui précédent le paſſage de l'aſtre au méridien, par l'action de l'aſtre ſur les eaux qui augmente à meſure que l'aſtre s'éloigne de l'horiſon, & par le mouvement diurne de la terre qui conſpire alors avec celui de l'aſtre: ce mouvement imprimé à l'eau conſerve pendant quelque tems ſon accélération, enſorte qu'elle s'éléve de plus en plus juſqu'à

La plus grande élévation de l'eau ne ſe fait pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien.

Quelle en eſt la raiſon.

ce que le mouvement diurne qui devient contraire après le paſſage de la Lune au méridien, ainſi que l'action de l'aſtre qui s'affoiblit ſucceſſivement, diminue peu à peu la viteſſe des eaux, & les force à s'abaiſſer. On ne s'apperçoit de cet abaiſſement qu'environ trois heures après la culmination de l'aſtre, par les mêmes raiſons qui font que leur élévation retarde ſur le paſſage de l'aſtre au méridien.

On ſent aiſément que le frottement des eaux contre le fond de la mer doit auſſi contribuer à retarder ces effets.

M. *Culler*, de la diſſertation duquel j'ai emprunté beaucoup de choſes dans ce Chapitre, dit, que ſi l'on ne conſidéroit que le mouvement vertical de l'eau, ſa plus grande élévation devroit avoir lieu dans le moment même du paſſage de la Lune au méridien, & même quelquefois plutôt à cauſe de l'action du Soleil, & il attribue la plus grande partie du retardement de l'élévation de l'eau à ſon mouvement horiſontal par lequel elle frotte contre le lit dans lequel elle coule.

Dans les régions où la mer ne communique pas avec l'océan, les marées retardent beaucoup davantage, enſorte que ce retardement va quelquefois juſqu'à 12 heures, & on a coutume de dire dans ces lieux que la marée précéde le paſſage de la Lune au méridien : au Port du Havre, par exemple, où la marée retarde de neuf heures, on croit qu'elle précéde de trois heures le paſſage de la Lune au méridien ; mais la vérité eſt que cette marée eſt l'effet de la précédente culmination.

XIV.

On vient de voir que l'effet de la Lune ſur les marées, eſt à celui du Soleil comme $4\frac{1}{2}$ à 1 environ. Or on n'a fait attention en déterminant le tems auquel arrivent les marées qu'à l'action de la Lune, ſi on ne faiſoit de même attention qu'à l'action du Soleil, les marées devroient ſuivre immédiatement le paſſage du Soleil au méridien, en faiſant abſtraction des cauſes externes qui les retardent ; mais la mer, en obéiſſant à ces deux aſtres ſelon la quantité

de leur action ſur elle, acquiert ſa plus grande hauteur par une force compoſée de ces deux forces, ainſi cette plus grande hauteur arrive dans un tems intermédiaire à celui dans lequel elle auroit lieu en conſidérant l'effet de chacune de ces forces ſéparément, & ce tems répond plus exactement au mouvement de la Lune qu'à celui du Soleil, parce que la force de la Lune ſur la mer eſt, comme on l'a vû précédemment, plus grande que celle du Soleil.

Le plus grand abaiſſement des eaux doit arriver quand la Lune eſt dans l'horiſon, puiſque c'eſt alors que ſon action ſur la mer eſt la plus oblique, c'eſt pourquoi il n'y a pas un éſpace égal entre deux élévations de l'eau, comme cela devroit arriver; mais la plus grande élévation qui ſuit eſt d'autant plus près de celle qui l'a précédée, que l'élévation du pôle du lieu qu'on conſidére ſera plus grande, & que la Lune aura plus de déclinaiſon, c'eſt-à-dire, d'autant plus qu'il y aura plus d'intervale entre le lever & le coucher de la Lune, & le cercle horaire de ſix heures après ſa culmination.

X V.

Voila les principaux phénoménes qui accompagnent les marées; & qui dépendent des poſitions des différentes parties de la terre par rapport au Soleil & à la Lune dans ſon cours journalier.

Les variations qui ont lieu dans les mois.

Il ſe trouve des différences tous les mois dans les marées qui dépendent des changemens de poſition de la Lune par rapport à la terre, car on ſçait que la Lune fait ſa révolution autour de la terre dans l'eſpace d'un mois.

X V I.

Les marées ſont plus grandes deux fois chaque mois à la nouvelle & à la pleine Lune.

Les marées ſont plus grandes deux fois chaque mois lorſque la Lune eſt pleine & nouvelle, c'eſt-à-dire, dans la conjonction & l'oppoſition, & cela parce qu'alors les actions du Soleil & de la Lune conſpirent à élever les eaux. Dans les quadratures, ces forces étant contraires l'une à l'autre, on a alors les plus petites marées.

Et plus petites dans les quadratures.

XVII.

Les plus grandes & les plus petites marées n'arrivent cependant pas précisément dans ce tems.

Et cela à cause de l'inertie de l'eau.

Les plus grandes & les plus petites marées n'arrivent cependant pas précifément dans les fyfigies & dans les quadratures, mais ce font quelquefois les troifiémes ou quatriémes après, & la raifon en eft dans la confervation du mouvement par l'inertie ; fi la mer étoit dans un parfait repos quand le Soleil & la Lune agiffent fur elle de concert dans les fyfigies pour élever les eaux, elle ne prendroit pas d'abord fa plus grande viteffe ni par conféquent fa plus grande hauteur, mais elle l'acquéreroit petit à petit : or comme les marées qui précédent les fyfigies ne font pas les plus grandes, elles augmentent petit à petit, & les eaux n'ont acquis leur plus grande hauteur que quelque tems après que la Lune a paffé les fyfigies. Il en eft de même des plus petites marées qui fuivent les quadratures, car le mouvement fe perd par dégré de même qu'il s'acquiert, & ce phénoméne a la méme caufe que le retardement des plus grandes marées diurnes fur le moment de l'appulfe de l'aftre au méridien.

La plus grande élévation de l'eau arrive plutôt dans le paffage des fyfigies aux quadratures après le paffage de la Lune par le méridien, & plus tard dans le paffage des quadratures aux fyfigies.

On a déja dit que dans les fyfigies le flux devroit précéder le paffage de la Lune au méridien, à caufe que le Soleil eft alors prefque dans l'horifon ; mais comme l'inertie retarde le mouvement des eaux, le flux doit fuivre plutôt le paffage de la Lune au méridien après, que dans les fyfigies, & c'eft ce que les obfervations confirment ; il arrive le contraire dans le paffage des quadratures aux fyfigies, parce qu'alors le flux eft perpétuellement retardé par le Soleil.

XVIII.

Elles font plus grandes, toutes chofes égales dans le périgée de la Lune que dans l'apogée.

Enfin, toutes chofes égales, les marées font toujours plus grandes dans les mêmes afpects du Soleil & de la Lune, & lorfqu'ils ont la même déclinaifon, lorfque la Lune eft dans fon périgée, que lorfqu'elle eft dans fon apogée, & cela doit être ainfi par la théorie,

puiſque les forces de la Lune ſur la mer décroiſſent en raiſon triplée de ſes diſtances à la terre.

X I X.

Les différences annuelles des marées dépendent de la diſtance de la terre au Soleil, ainſi les marées ſont plus fortes, toutes choſes égales, en hyver dans les ſyſigies, & moindres dans les quadratures qu'en été, parce qu'en hyver le Soleil eſt plus près de la terre.

Les variations annuelles. Les marées ſont plus grandes en hiver qu'en été à cauſe de la plus grande proximité du Soleil.

X X.

Les effets de la Lune & du Soleil ſur les marées dépendent encore de la déclinaiſon de ces aſtres, car ſi l'aſtre étoit placé dans le pôle, il attireroit d'une maniere conſtante chaque particule d'eau, & ſon action étant toujours égale, elle n'exciteroit dans cette eau aucun mouvement de réciprocation; ainſi il n'y auroit ni flux ni reflux; donc l'action du Soleil & de la Lune, pour exciter ce mouvement, deviennent plus foibles à meſure qu'ils s'éloignent de l'équateur; & M. *Newton*, Prop. 37. Liv. 3. dit, que la force de l'aſtre ſur la mer décroît à peu près en raiſon doublée du ſinus de complément de ſa déclinaiſon; c'eſt-là la raiſon pour laquelle les marées ſont moindres dans les ſyſigies ſolſtitiales, que dans les équinoctiales: & elles doivent être plus grandes dans les quadratures ſolſtitiales, que dans les équinoctiales; parce que dans le premier cas la Lune fait un plus grand effet que le Soleil.

Les marées dépendent encore de la déclinaiſon du Soleil & de la Lune.

Les plus grandes marées arrivent donc dans les ſyſigies, & les plus petites dans les quadratures des deux aſtres vers l'équinoxe, & la plus grande marée dans les ſyſigies eſt toujours accompagnée de la plus petite dans les quadratures, & le Soleil étant plus près de la terre en hyver qu'en été, fait que les plus grandes & les moindres marées précédent plus ſouvent l'équinoxe du printems, qu'elles ne la ſuivent, & ſuivent plus ſouvent celle d'automne, qu'elles ne la précédent.

Les deux plus grandes marées n'arrivent pas dans deux ſyſigies

continues, parce que s'il arrive que la Lune dans l'une des syſigies ſoit dans ſon périgée, elle ſera la ſyſigie ſuivante dans ſon apogée : or, dans le premier cas, ſon action étant la plus grande & conſpirant avec celle du Soleil, elle fera monter l'eau à ſa plus grande hauteur ; mais comme dans la ſyſigie ſuivante, où elle eſt dans ſon apogée, ſon action eſt la moindre, alors la marée ne ſera plus ſi forte.

XXI.

Le tems & la hauteur des marées dépendent de la latitude des lieux.

Le flux & le reflux dépendent encore de la latitude du lieu. Car en diſtinguant toute la mer en deux flots hémiſphériques, l'un boréal & l'autre auſtral, ces deux flots qui ſont oppoſés l'un à l'autre, arrivent tour à tour au méridien de chaque lieu à douze heures lunaires d'intervale ; mais comme les régions boréales participent plus du flux boréal, & les auſtrales du flux auſtral, les flux ſeront alternativement plus grands & plus petits dans chaque lieu hors de l'équateur ; le plus grand flux, quand la déclinaiſon de la Lune ſera vers le lieu qu'on conſidére, arrivera environ trois heures après le paſſage de la Lune au méridien, & le flux, quand la Lune changera ſa déclinaiſon, du plus grand deviendra le plus petit, & la plus grande différence de ces flux ſera vers le tems des ſolſtices. Ainſi l'hyver le flux du matin doit être plus grand, & l'été ce doit être celui du ſoir ; & l'on apprend dans la Prop. 24. du Liv. 3. qu'à *Plimouth*, ſelon l'obſervation de *Colopreſſus*, cette différence va à un pied, & à *Briſtol*, ſelon celle de *Sturnius*, à 15 pouces. M. *Newton* (dans le Livre *De Mundi Syſtemate*, pag. 58.) dit, que la hauteur des marées diminue dans chaque lieu, en raiſon doublée des

Leur hauteur diminue en raiſon doublée des ſinus de complément de la latitude.

ſinus de complément de la latitude de ce lieu : or, on vient de voir que dans l'équateur elles diminuent en raiſon doublée du ſinus de complément de la déclinaiſon de l'aſtre ; donc hors de l'équateur la moitié de la ſomme de la hauteur à laquelle montent les marées le matin & le ſoir, c'eſt-à-dire, l'aſcenſion moyenne diminue dans la même raiſon à peu près, ainſi on peut connoître par ce moyen

la

la diminution des marées causée par la latitude des lieux & la déclinaison de l'astre.

XXII.

La grandeur du flux & du reflux dépend aussi de l'étendue des mers dans lesquelles ils arrivent, soit que les mers soient entierement séparées de l'océan, ou qu'elles n'y communiquent que par un canal très-étroit; car si les mers ont 90° en longitude, le flux & le reflux doit être le même que s'il venoit de l'océan, parce que cet espace suffit pour que le Soleil & la Lune produisent sur les eaux de la mer leur plus grand & leur moindre effet; mais si ces mers sont si étroites, que chacune de leurs parties soient élevées & déprimées avec la même force, il ne pourroit y avoir d'effet sensible, car l'eau ne peut s'élever dans un lieu, qu'elle ne s'abaisse dans un autre; c'est ce qui fait que dans la mer Baltique, la mer Noire, la mer Caspienne, & dans d'autres mers ou lacs plus étroits encore, il n'y a ni flux ni reflux.

La grandeur du flux dépend de l'étendue des mers.

XXIII.

La mer Méditerranée qui n'a que soixante dégrés en longitude, éprouve des flux à peine sensibles, & M. *Euler* a donné une méthode pour déterminer leur grandeur; ces marées peu sensibles peuvent encore être diminuées par les vents & par les courants qui sont très considérables dans cette mer; c'est ce qui fait que dans beaucoup de ses ports il n'y a presque pas de flux réglé. Il en faut excepter cependant la mer Adriatique qui a plus de profondeur, ce qui rend son élévation beaucoup plus sensible; c'est ce qui fait, dit M. *Euler*, que les Vénitiens sont les premiers qui ayent fait des observations sur le flux de la Méditerranée.

Les flux dans la Méditerranée sont à peine sensibles.

Il n'y a que dans la mer Adriatique où ils soient sensibles.

XXIV.

Ainsi, outre les causes assignables par lesquelles on peut rendre compte des phénoménes de la mer, il y en a encore plusieurs qui

Il entre dans les phénoménes du flux & du re-

flux plusieurs causes qui ne sont pas assignables.

causent des inégalités dans ses mouvemens, qui ne sont réductibles à aucune loi, parce qu'elles dépendent d'élémens qui changent à chaque lieu ; tels sont les lits sur lesquels passent les eaux, les détroits, les différentes profondeurs des mers, leur largeur, les embouchures des fleuves, les vents, &c. toutes causes qui peuvent altérer la quantité du mouvement de l'eau, & par conséquent retarder le flux, l'augmenter, ou le diminuer, & qui ne peuvent être soumises au calcul ; c'est pourquoi il y a des lieux où le flux arrive trois heures après la culmination de l'astre, & d'autres où il n'arrive que douze heures après ; & en général, plus les marées sont grandes, plus elles arrivent tard, & cela doit être ainsi, puisque les causes qui les retardent agissent pendant un tems d'autant plus long.

Si le flux étoit infiniment petit, il auroit lieu précisément dans le moment même de la culmination, parce que les obstacles qui le retardent agiroient infiniment peu ; c'est en partie pourquoi les plus grandes marées qui arrivent vers la nouvelle & la pleine Lune, suivent plus tard le passage de la Lune au méridien, que celles qui arrivent vers les quadratures ; car ces dernieres marées sont les plus petites.

XXV.

M. *Euler* rapporte qu'à S. *Malo*, dans le tems des syzigies, le flux arrive la sixiéme heure après le passage de la Lune au méridien, & la retardation augmente de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin à *Dunkerque* & à *Ostende* il n'arrive qu'à minuit. On peut par cette retardation connoître la vitesse de l'eau, & M. *Euler* trouve par ces observations, & par d'autres encore, qu'elle fait huit milles environ en une heure ; mais on sent que cette détermination ne peut être générale.

Vitesse des eaux de la mer.

XXVI.

Ces marées sont toujours plus grandes vers les côtes, & pourquoi.

Les marées sont toujours plus grandes vers les côtes qu'en pleine mer, & plusieurs raisons y contribuent ; premierement, l'eau frappe contre les rivages, ce qui doit par la réaction augmenter sa hauteur ;

fecondement, elle y arrive avec la viteffe qu'elle avoit dans l'océan où fa profondeur eft très grande, & elle arrive en grande quantité, ce qui fait que par la grande réfiftance que lui oppofent les rivages, elle s'éléve beaucoup davantage; enfin quand elle paffe par des détroits, fa hauteur augmente beaucoup, parce qu'étant repouffée par les rivages, elle vient avec la force qu'elle a acquis par l'effort qu'elle a fait pour les inonder, c'eft pourquoi à *Briftol* elle monte à une fi grande hauteur vers les fyfigies; car fur cette côte le rivage eft plein de finuofités & de bancs de fable contre lefquels l'eau frappe avec une grande force, & defquels elle ne peut s'échapper auffitôt qu'elle feroit fi le rivage étoit uni.

XXVII.

C'eft par ces principes qu'on peut rendre raifon des flux énormes qui ont lieu dans quelques ports, comme à *Plimouth*, au mont S. *Michel*, & à *Avranches*, où M. *Newton* affure (*De Syftemate mundi*) que l'eau monte jufqu'à 40 & 50 pieds, & quelquefois plus.

Explication de plufieurs phénoménes du flux & du reflux.

Il peut arriver que le flux vienne au même port par plufieurs chemins, & qu'il paffe par quelques-uns de ces chemins plus vîte que par les autres, alors le flux paroîtra partagé en plufieurs flux fucceffifs, qui auroient des mouvemens différens, & qui ne reffembleroient point aux flux ordinaires : fuppofons, par exemple, que de tels flux foient partagés en deux flux égaux, dont l'un précéde l'autre de fix heures, & qu'il arrive trois heures ou vingt fept heures après l'appulfe de la Lune au méridien, fi la Lune étoit alors dans l'équateur, il y auroit à fix heures d'intervale des flux égaux qui feroient détruits par des reflux de la même grandeur, & l'eau ftagneroit pendant vingt-quatre heures ce jour là.

Si la Lune déclinoit, ces flux feroient dans l'océan alternativement plus grands & plus petits, ainfi dans ce port il y auroit alternativement deux plus grands & deux plus petits flux; les deux plus grands feroient acquérir à l'eau une plus grande hauteur qui fe trouveroit dans le milieu de ces deux flux, & par les deux plus petits, elle acquéreroit fa moindre hauteur au milieu de ces deux

plus petits flux, & l'eau acquéreroit dans le milieu de sa plus grande & de sa moindre hauteur une hauteur moyenne ; ainsi dans l'espace de vingt quatre heures, l'eau, dans ce port, ne s'éleveroit pas deux fois, comme elle fait ordinairement, mais elle n'acquéreroit qu'une fois sa plus grande, & une fois sa plus petite hauteur.

Si la Lune décline vers le pôle élevé sur l'horison, sa plus grande hauteur sera la 3ᵉ, la 6ᵉ, ou la 9ᵉ heure après l'appulse de la Lune au méridien ; & si la Lune décline vers l'autre pôle, le flux se changera en reflux.

XXVIII.

Explication des circonstances qui accompagnent le flux & le reflux à *Batsham*, dans le Royaume de *Tunquin*.

Tout cela a lieu à *Batsham*, dans le royaume de *Tunquin*, à 20° 50′ de latitude boréale, il n'y a ni flux ni reflux le jour qui suit le passage de la Lune par l'équateur ; ensuite quand elle décline vers le nord, le flux & le reflux recommencent & n'arrivent pas deux fois par jour, comme dans les autres ports, mais une fois seulement.

L'eau arrive de l'océan dans ce port de deux côtés, l'un par la mer de la Chine par un chemin plus droit & plus court entre l'isle de *Leuconie* & le rivage de *Kanton*, & l'autre de la mer des Indes entre la *Cochinchine* & l'isle de *Borneo*, par un chemin plus long & plus tortueux. Or, l'eau arrive plutôt par le chemin le plus court, ainsi elle arrive de la mer de la Chine en six heures, & de celle des Indes en 12. donc l'eau arrivant la 3ᵉ & la 9ᵉ heure après l'appulse de la Lune au méridien, il en résulte les phénoménes dont je viens de parler.

XXIX.

Aux embouchures des fleuves le reflux dure plus longtems que le flux, & pourquoi.

Aux embouchures des fleuves, le flux & le reflux sont encore différens, car le courant du fleuve qui entre dans la mer résiste au mouvement du flux de la mer, & aide son mouvement de reflux, & cette cause doit par conséquent faire durer le reflux plus longtems que le flux, & c'est aussi ce qui arrive ; car *Sturnius* rapporte qu'au-dessus de *Bristol*, à l'embouchure du fleuve de l'*Oundale*, le flux dure cinq heures & le reflux sept ; c'est pourquoi encore, toutes choses égales d'ailleurs, les plus grands flux arrivent plus tard aux embouchures des fleuves qu'ailleurs.

XXX.

Sous les pôles il n'y a ni flux ni reflux diurne, mais seulement ceux qui dépendent de la révolution de la Lune autour de la terre.

On a dit ci-dessus que le flux & le reflux dépendoient de la déclinaison de l'astre & de la latitude du lieu, ainsi sous les pôles il ne doit y avoir ni flux ni reflux diurne, car la Lune étant à la même élévation sur l'horison pendant 24 heures, elle ne passe point au méridien du lieu, & par conséquent elle ne peut y élever les eaux; mais dans ces régions, la mer a le flux & reflux qui dépendent de la révolution de la Lune autour de la terre chaque mois, ainsi la plus petite marée y arrive quand la Lune est dans l'équateur, parce qu'alors elle est toujours dans l'horison pour les pôles; ensuite le flux & le reflux commence peu à peu à mesure que la Lune décline vers le nord ou vers le midi, & quand sa déclinaison est la plus grande, elle n'éléve l'eau que de 10 pouces au pôle vers lequel elle décline, & comme cette élévation se fait par un mouvement très lent, la force d'inertie l'augmente très peu, ainsi il est à peine sensible.

XXXI.

Mais il n'y a que sous les pôles où il ne se fait aucun flux diurne, car dans la Zone glaciale, il y en a un. Pourquoi il n'y en a pas deux comme dans les autres climats?

Ce n'est que sous le pôle que l'eau n'éprouve aucun mouvement diurne; mais dans la zône glaciale, il y a un flux chaque jour au lieu des deux qui ont lieu chaque jour dans la zône torride, & dans nos zônes tempérées; & il est aisé de faire voir que ce passage de deux flux à un ne se fait pas subitement, mais qu'il s'opére par dégré comme tous les effets de la nature. Car on doit se souvenir qu'on a dit ci-dessus que les deux flux diurnes de nos zônes tempérées ne sont pas égaux: or, dans ce cas, il est certain que les plus petits flux seront plus voisins l'un de l'autre, lorsque les deux flux successifs seront inégaux, non-seulement quant à la hauteur des eaux, mais aussi quant au tems de leur durée; or, plus le lieu est éloigné de l'équateur, plus il y a d'inégalité entre deux flux successifs, tant pour leur grandeur que pour le tems pendant lequel ils durent, car le plus grand flux doit durer plus longtems que le plus petit, & cependant tous deux cessent en 12 heures 24' à peu près. Donc dans les régions où la Lune passe dans cet intervale au méridien de dessus & au méridien de dessous, le plus petit flux doit dif-

paroître entierement, & il ne doit rester que le plus grand flux qui remplira seul l'intervale de 12 heures 24′; d'où il est clair que la Lune déclinant, l'inégalité des deux flux successifs doit devenir plus grande à mesure qu'on approche des pôles, & enfin s'évanouir entierement sous les pôles, & alors les deux flux n'en feront plus qu'un.

XXXII.

Pourquoi le Soleil & la Lune faisant des effets si sensibles sur les marées, ils ne font point d'autre effet sensible ici bas?

Les forces du Soleil & de la Lune, telles qu'on a vû que M. *Newton* les a déterminées, suffisent pour causer les marées, mais elles ne peuvent produire d'autre effet sensible sur la terre. Car la force du Soleil pour élever la mer étant à la gravité ici-bas comme 1 à 12868200, & la somme des plus grandes forces réunies, que le Soleil & la Lune exercent sur la mer, étant à cette même gravité comme 2032890 à 1, on voit que ces forces réunies ne pourroient pas déranger les pendules de leur situation verticale d'un angle égal à la dixiéme partie d'une seconde, & ne changeroient pas la longueur du pendule à secondes de $\frac{1}{500}$ de ligne; elles ne produiroient pas un effet plus sensible sur le barométre, ni n'auroient enfin aucun effet sensible ici-bas.

XXXIII.

Conjectures sur le flux & reflux des mers de Jupiter & de ses Satellites.

Les effets de la Lune sur notre mer, doivent nous faire juger que si Jupiter a des mers, ses satellites dans leurs conjonctions & dans leurs oppositions doivent y exciter de grands mouvemens, supposé que ces satellites ne soient pas beaucoup plus petits que notre Lune. Car le diamétre de Jupiter a une beaucoup plus grande raison à la distance du satellite qui est le plus loin de lui, que celle du diamétre de la terre à la distance de la Lune à la terre, & on a vû que l'action de la Lune sur la mer dépend de cette proportion. Peut-être les changemens qu'on remarque dans les taches de Jupiter viennent-elles en partie des mouvemens que ses satellites excitent dans les eaux de cette planete, & si on observoit que ces changemens eussent avec les aspects de ces satellites l'analogie qui suit de cette théorie, on auroit une preuve que c'en est la véritable cause.

Comment M. Newton explique les Phénoménes des planetes ſecondaires, & principalement ceux de la Lune.

I.

Le premier phénoméne que les planetes ſecondaires préſentent aux Phyſiciens, c'eſt la tendance qu'elles ont vers leur planete principale, en ſuivant la même loi que les planetes principales vers le Soleil. Nous avons ſuffiſamment établi cette tendance dans le ſecond Chapitre, à l'occaſion des planetes principales, en négligeant, comme il le faut d'abord pour ſimplifier la queſtion, toutes les inégalités que les planetes produiſent entr'elles, ou qu'elles peuvent recevoir de la part du Soleil. Mais il eſt maintenant à propos d'examiner ces inégalités, pour voir d'une maniere plus ſatisfaiſante l'univerſalité du principe de l'attraction, & l'harmonie du ſyſtême dont il eſt la baſe. La Lune eſt de toutes ces planetes celle dont on connoît le mieux les variations, & celle dont la marche peut être le plus facilement ſoumiſe à la théorie.

Il nous manque pour l'entier examen des autres planetes ſecondaires, un élément auquel il paroît comme impoſſible de ſuppléer, la connoiſſance de leurs maſſes, laquelle eſt néceſſaire pour meſurer leurs actions réciproques, & les dérangemens de leurs orbites qui en réſultent. Et quand même, abandonnant l'eſpérance de calculer par la ſeule théorie les mouvemens de ces aſtres, l'on ſe propoſeroit ſeulement de faire voir *à poſteriori* que les phénoménes n'ont rien de contraire au principe de l'attraction, on n'en ſeroit pas maintenant plus avancé, parce que les phénoménes mêmes, conſidérés aſtronomiquement, ne ſont pas aſſez bien déterminés. Tout ſe réduit donc pour la théorie de ces planetes, à avoir vû que les forces avec leſquelles elles agiſſent les unes ſur les autres, ou celle avec laquelle le Soleil agit ſur elles pour déranger leurs orbites, ſont très petites

en comparaison de l'attraction qu'elles éprouvent vers leurs planetes principales, & que cette attraction est comme toutes les autres inversement proportionnelle aux quarrés des distances.

Les différentes sortes de mouvemens qu'on avoit remarqué depuis longtems dans la Lune, & les loix de ces mouvemens trouvées par de célébres Astronomes, ont fourni à M. *Newton* des moyens d'appliquer avec succès sa théorie à cette planete. Ce grand homme qui avoit déja tant fait de découvertes dans les autres parties du Systême du Monde, a voulu encore perfectionner celle-là; & quoique la méthode qu'il ait suivie en cette occasion soit moins claire & moins satisfaisante que celle qu'il avoit employée dans les autres phénoménes, on ne peut pas s'empêcher de lui devoir beaucoup de reconnoissance de s'y être appliqué.

Nous allons donner une légere idée de la méthode qu'il a suivie dans cette recherche.

I.

On voit aisément que si le Soleil étoit à une distance de la terre & de la Lune qui fut infinie par rapport à celle qui sépare ces deux planetes, il ne troubleroit en aucune maniere les mouvemens de la Lune autour de la terre; puisque des forces égales & dont les directions sont paralléles, qui agissent sur deux corps quelconques, ne sauroient altérer leurs mouvemens relatifs. Mais comme l'angle que font les lignes tirées de la Lune & de la terre au Soleil, quoique très petit, ne sauroit être regardé comme nul, il faut donc y avoir égard, & en déduire l'inégalité de l'action du Soleil sur les deux corps à considérer.

Maniere d'avoir égard à l'inégalité de la force du Soleil sur la terre & sur la Lune.

Prop. 66. Liv. 1.

Prenant donc, ainsi que M. *Newton*, sur la ligne tirée de la Lune au Soleil une droite pour représenter la force avec laquelle le Soleil l'attire, soit regardé cette droite comme la diagonale d'un parallélograme dont un côté seroit sur la ligne tirée de la Lune à la terre, & l'autre une paralléle menée de la Lune à la droite qui

qui joint le Soleil & la terre. Il eſt clair que ces deux côtés du même parallélograme, repréſenteront deux forces qu'on peut ſubſtituer à la force du Soleil ſur la Lune, & que la premiere de ces deux forces, celle qui pouſſe la Lune vers la terre, ne troublera en aucune maniere l'obſervation de la régle de *Kepler* des aires proportionnelles aux tems, mais qu'elle changera ſeulement la loi de la force avec laquelle la Lune tendra vers la terre, & altérera en conſéquence la forme de ſon orbite. Quant à la ſeconde force, celle qui agit ſuivant la paralléle au rayon de l'orbite de la terre, ſi elle étoit égale à la force avec laquelle le Soleil agit ſur la terre, on voit aiſément qu'elle ne produiroit aucun dérangement à l'orbite de la Lune; mais cette égalité ne peut arriver que dans les points où la Lune eſt à une diſtance du Soleil égale à celle où en eſt la terre dans le même tems, ce qui arrive vers les quadratures. Dans tout autre point, ces deux quantités étant inégales, c'eſt leur différence qui exprime la force perturbatrice du Soleil ſur la Lune, tant pour déranger la deſcription égale des aires en tems égaux, que pour empêcher la Lune de ſe mouvoir toujours dans le même plan.

La force du Soleil ſe décompoſe en deux autres.

L'une pouſſe la Lune vers la terre.

L'autre agit ſuivant la ligne tirée de la terre au Soleil.

III.

On ne trouve dans la Propoſition du premier Livre que je viens de citer, que l'expoſition générale de cette maniere d'eſtimer les forces perturbatrices du Soleil ſur la Lune: mais dans le troiſiéme on trouve le calcul qui meſure leur quantité; on y apprend que la partie de la force du Soleil qui pouſſe la Lune vers la terre, eſt dans ſa médiocre quantité, la $\frac{1}{178\frac{29}{40}}$ de celle par laquelle la terre agit ſur elle dans ſes moyennes diſtances.

Prop. 25. Liv. 3.

Meſure des forces perturbatrices du Soleil.

On voit enſuite que l'autre partie de la même force du Soleil, celle qui agit parallélement au rayon de l'orbite de la terre, eſt à la premiere, comme eſt au ſinus total, le triple du coſinus de l'angle que font entr'elles les droites tirées de la Lune & de la terre au Soleil.

IV.

Accélération des aires dérivée de cette force.

M. *Newton* employe cette détermination des forces perturbatrices, dans les Prop. 26. 27. 28. 29. du même Livre, à calculer celle des inégalités de la Lune qu'on appelle sa variation, & dont la découverte est dûe à *Tycho*.

M. *Newton*, pour déterminer cette inégalité, fait abstraction de toutes les autres : il regarde même la Lune comme si elle devoit parcourir un cercle parfait autour de la terre sans l'action du Soleil, & il cherche l'accélération que l'aire doit recevoir par celle des deux forces perturbatrices qui agit parallélement au rayon tiré de la terre au Soleil. Il trouve que l'aire décrite dans chaque instant supposé égal, est toujours à peu près proportionelle à la somme du nombre 219, 46, & du sinus verse du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature (le rayon étant l'unité); ensorte que la plus grande inégalité de la description des aires se trouve dans les octans où ce sinus verse est dans son maximum.

V.

L'action du Soleil rend l'orbite de la Lune plus étroite entre les syzigies, qu'entre les quadratures.

Pour déterminer ensuite l'équation que doit donner au mouvement de la Lune cette accélération de l'aire, il a égard au changement de figure que recevroit l'orbite par la force perturbatrice. Il cherche la quantité dont la force perturbatrice doit rendre la ligne qui passe par les quadratures plus longue que celle qui traverse les syzigies. Les données qu'il employe en résolvant ce Problême, sont les vitesses qu'il a montré à déterminer pour ces deux points dans la proposition précédente, & les forces centripétes aux mêmes points, lesquelles sont composées l'une & l'autre de la force vers la terre, & des forces perturbatrices du Soleil qui agissent alors toutes deux dans le même sens que le rayon de l'orbite de la Lune. Or, les courbures devant être alors directement comme les attractions, & inversement comme les quarrés des vitesses, il a par ce moyen le rapport des courbures, & il en déduit les axes de l'orbite

en prenant pour hypothèse que cette courbe soit une ellipse dont la terre est le centre, si le Soleil est supposé fixe pendant que la Lune va de la sysigie à la quadrature, & qu'elle soit, lorsqu'on a égard au mouvement du Soleil, une courbe dont les rayons sont les mêmes que ceux de l'ellipse pendant que l'on augmente les angles qu'ils contiennent dans la raison du mouvement périodique de la Lune à son mouvement synodique. Le premier de ces mouvemens étant celui dans lequel on rapporte la Lune à un point fixe du Ciel; l'autre étant celui où on la compare au Soleil. Par ces suppositions M. *Newton* parvient à trouver que l'axe qui passe par les quadratures, doit être plus grand que celui qui traverse les sysigies de $\frac{1}{69}$.

V I.

Calcul de la variation de la Lune.

Il calcule ensuite dans la même hypothèse l'équation ou correction, au mouvement moyen de la Lune, qui doit résulter tant de l'accélération trouvée dans le problême précédent, en ne regardant l'orbite que comme circulaire, que celle qui viendroit de la nouvelle figure de cette orbite, par le principe des aires proportionnelles aux tems. La combinaison de ces deux causes lui donne une équation qui se trouve la plus grande dans les octans, & qui monte alors à 35′ 10″. Dans les autres cas, elle est proportionnelle au sinus du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature. Cette quantité se trouve être celle qui convient avec les observations, & forme celle des équations du mouvement de la Lune que l'on appelle variation ou réflexion. Il est bon d'ajouter, avec M. *Newton*, que la variation des octans, n'est de cette quantité, que dans le cas où l'on suppose la terre dans sa moyenne distance; & que dans les autres cas, il faut prendre une quantité qui soit à cet angle de 35′ 10″ en raison renversée du cube de la distance au Soleil. La raison en est que l'expression de la force perturbatrice du Soleil, laquelle est la cause de toutes les inégalités de la Lune, est divisée par le cube de la distance au Soleil.

VII.

Prop. 30 & 31. Liv. 3.

Calcul du mouvement des nœuds de la Lune.

M. *Newton* passe de l'examen de la variation de la Lune à celui du mouvement de ses nœuds. Dans cette recherche il néglige, ainsi que dans la précédente, l'excentricité de l'orbite de la Lune. Il suppose qu'elle se mouvroit dans un cercle sans la force perturbatrice du Soleil, & n'attribue à cette force d'autre effet que de changer l'orbite circulaire en une ellipse dont la terre est le centre, ou plutôt dans la courbe dont nous venons de donner la construction par le moyen d'une ellipse.

Quelle est celle des deux forces du Soleil qu'il faut employer.

Des deux forces perturbatrices du Soleil, il n'a besoin de considérer que celle qui agit parallelement à la ligne tirée de la terre au Soleil : l'autre, c'est-à-dire, celle qui pousse la Lune vers la terre agissant dans l'orbite même, ne peut être la cause du mouvement qu'a le plan de cette orbite. N'ayant donc que cette force à considérer, & ayant trouvé qu'elle étoit proportionnelle au cosinus de l'angle que font les lignes tirées de la Lune au Soleil & à la Lune ; voici comme il employe cette force.

A l'extrémité du petit arc que la Lune a décrit dans un instant quelconque, il en prend un égal, qui seroit celui que la Lune parcoureroit sans la force perturbatrice ; & par l'extrémité de ce nouvel arc, il méne une petite droite parallèle à la distance de la terre au Soleil, & il détermine la longueur de cette droite, par la mesure déja déterminée de la force qui agit dans le même sens qu'elle. Cela fait, la diagonale du petit côté que la Lune auroit décrit sans la force perturbatrice, & du côté que feroit décrire cette force si elle étoit seule, donne le vrai petit arc que doit décrire la Lune. Il ne s'agit donc plus que de voir combien le plan qui passeroit par ce petit arc & par la terre, diffère du plan qui passe par le premier côté, & de même par la terre.

Les deux petits côtés dont nous venons de parler étant prolongés jusqu'à ce qu'ils rencontrent le plan de l'orbite de la terre, & ayant tiré de leur rencontre avec ce plan deux droites à la terre, l'angle

que font ces deux droites, eſt le mouvement du nœud pendant l'inſtant que la Lune met à parcourir ce nouveau petit arc que l'on vient de conſidérer. Mais comme nous ne pouvons pas ſuivre ici le calcul par lequel M. *Newton* détermine ce petit angle, nous nous contenterons de dire qu'il établit d'une maniere très claire, que ſa meſure & partant la viteſſe ou le mouvement inſtantané du nœud eſt proportionnel au produit des ſinus des trois angles qui expriment les diſtances de la Lune à la quadrature, de la Lune au nœud, & du nœud au Soleil.

Loix du mouvement des nœuds.

VIII.

Il ſuit de-là une remarque ſinguliere ſur le mouvement des nœuds de la Lune : c'eſt que lorſque l'un de ces trois ſinus ſe trouve négatif, le nœud, de rétrograde qu'il eſt auparavant, devient direct. Ainſi lorſque la Lune eſt entre la quadrature & le nœud voiſin, le nœud avance ſuivant l'ordre des ſignes. Dans les autres cas il rétrograde, & comme l'eſpace fait, en rétrogradant, eſt plus conſidérable que celui qui eſt parcouru d'un mouvement direct, il arrive que dans chaque révolution de la Lune, le nœud s'eſt mû réellement contre l'ordre des ſignes.

Régreſſion & progreſſion des nœuds dans chaque révolution.

A la fin de chaque révolution les nœuds ſe ſont mûs en arriere.

Lorſque la Lune eſt dans les ſyſigies & le nœud dans les quadratures, c'eſt-à-dire à 90 dégrés du Soleil, le mouvement horaire eſt de $33''\ 10'''\ 37^{iv}\ 12^{v}$. Pour avoir donc ſon mouvement horaire dans toutes les autres ſituations, il faut prendre un angle qui ſoit à celui-là, comme le produit des trois ſinus dont je viens de parler eſt au cube du rayon.

Formule qui donne le mouvement horaire quelconque.

IX.

Prenant le Soleil & le nœud pour fixe pendant que la Lune ſe trouve ſucceſſivement à toutes les diſtances du Soleil, M. *Newton* cherche le mouvement horaire du nœud qui eſt le milieu entre tous les différens mouvemens que donneroit la formule précédente, & ce mouvement moyen, qu'il appelle le mouvement médiocre du nœud, eſt de $16''\ 33'''\ 16^{iv}\ 36^{v}$, lorſque l'on ſuppoſe l'orbite circulaire, & que

Prop. 31. Liv. 3. Détermination du mouvement moyen des nœuds.

l'on prend le cas où les nœuds ſont en quadrature avec le Soleil. Dans les autres poſitions il eſt à cette quantité comme le quarré du ſinus de la diſtance du Soleil au nœud eſt au quarré du ſinus total.

Si on ſuppoſe que l'orbite ſoit l'ellipſe employée déja à l'article de la variation dont la terre eſt le centre, le mouvement médiocre dans les quadratures n'eſt plus que $16''$, $16'''$, 37^{iv}, 42^{v}. & dans les autres poſitions il dépend également du quarré du ſinus de la diſtance au Soleil.

Afin de parvenir à déterminer pour un tems quelconque propoſé le lieu moyen du nœud, M. *Newton* prend un milieu entre tous les mouvemens médiocres conſidérés comme nous venons de le dire : & il ſe ſert pour cette recherche de la quadrature des courbes & de la méthode des ſéries. Par ce moyen il trouve que le mouvement des nœuds dans une année ſydérale doit être de $19^{\circ}\ 18'\ 1''\ 23'''$ ce qui ne s'écarte que d'environ $3'$ des déterminations faites par les Aſtronomes.

X.

Prop. 33. Liv. 3. Détermination du lieu vrai du nœud pour un tems donné.

La même courbe qui par la quadrature de ſon eſpace entier donne le milieu entre toutes les viteſſes médiocres du nœud, ſert auſſi par la quadrature de ſes parties quelconques à trouver le lieu vrai du nœud pour l'inſtant propoſé.

Voici le réſultat de ſon calcul en négligeant ce qui peut être négligé. Ayant fait un angle égal au double de celui qui exprime la diſtance du Soleil, au lieu moyen du nœud, on rendra les deux côtés de cet angle tels que le plus grand ſoit au plus petit, comme le mouvement moyen annuel des nœuds qui eſt de $19^{\circ}\ 49'\ 3''$, $55'''$ eſt à la moitié de leur mouvement vrai médiocre, lorſqu'ils ſont dans les quadratures, laquelle eſt de $0^{\circ}\ 31'\ 2''\ 33'''$ c'eſt-à-dire comme 38, 3 à 1. Cela fait, & ayant achevé le triangle donné par cet angle & par ſes deux côtés, l'angle de ce triangle qui ſera oppoſé à ce petit côté repréſentera aſſez exactement l'équation ou correction qu'il faut faire au mouvement moyen pour avoir le vrai,

X I.

De la recherche du mouvement des nœuds, M. *Newton* passe à la détermination des changemens que subit l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Cet examen est nécessairement lié avec le premier, & est tout aussi indispensable, puisque la connoissance de la latitude de la Lune dépend également de ces deux élémens. En employant, comme nous l'avons vû tout-à-l'heure pour le mouvement des nœuds, celle des deux parties de la force perturbatrice du Soleil qui n'agit pas dans le plan de l'orbite de la Lune, M. *Newton* parvient facilement à mesurer le changement horaire qu'éprouve l'inclinaison de l'orbite de la Lune, & ce changement, lorsque l'on suppose l'orbite circulaire, se trouve en diminuant premiérement le mouvement horaire des nœuds, lequel est de $33'' \; 10''' \; 33^{iv} \; 12^{v}$ (les nœuds étant dans les quadratures & la Lune dans les syzigies) dans la raison du sinus de l'inclinaison de l'orbite de la Lune au rayon, & en prenant ensuite une quantité qui soit au nombre donné par cette opération comme le produit du sinus de la distance de la Lune à la quadrature voisine, par le sinus de la distance du Soleil au nœud & par le sinus de la distance de la Lune au nœud, est au cube du rayon. Ce changement horaire de l'obliquité de l'écliptique de la Lune n'est calculé que dans la supposition que son orbite soit circulaire, mais si l'on veut qu'il convienne à l'orbite elliptique que M. *Newton* a tiré de la force perturbatrice du Soleil sans égard à l'excentricité, il faut le diminuer de $\frac{1}{69}$.

Prop. 34. Du changement dans l'inclinaison de l'orbite.

Variation horaire de l'inclinaison.

X I I.

Après avoir déterminé ainsi le changement horaire de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, M. *Newton* employant la même méthode & les mêmes suppositions par laquelle il avoit trouvé le lieu vrai du nœud dans un instant quelconque proposé, parvient à déterminer l'inclinaison de l'orbite pour un moment quelconque. Voici le résultat de son calcul.

Prop. 35. Maniere d'avoir l'inclinaison pour un tems donné.

Soient prises sur une base à compter d'un même point trois parties en progression géométrique, dont la première représente la plus petite inclinaison & la troisiéme la plus grande. Soit menée ensuite par l'extrémité de la seconde une droite qui fasse avec la base un angle égal au double de la distance du Soleil au nœud pour le mouvement proposé. Soit prolongée cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre le demi cercle décrit sur la différence de la premiere & de la troisiéme des lignes couchées sur la base. Cela fait l'intervale compris entre la premiere extremité de la base & la perpendiculaire abbaissée de la commune section du cercle & du côté de l'angle dont on vient de parler, exprimera l'inclinaison pour le tems proposé.

XIII.

Ce que Mr. *Newton* dit sur les autres inégalités de la Lune.

M. *Newton*, après avoir exposé la méthode par laquelle il calcule celle des inégalités de la Lune appellée sa variation, & la méthode qu'il suit en déterminant le mouvement des nœuds & la variation de l'obliquité de l'écliptique, rend compte de ce qu'il dit avoir tiré de sa théorie de la gravitation par rapport aux autres inégalités de la Lune. Mais il s'en faut bien que ce qu'il donne alors puisse être aussi utile aux géometres, que ce qu'il a dit auparavant par rapport aux inégalités dont je viens de parler.

Dans l'examen des premieres inégalités, quoique le lecteur ne soit pas extrémement satisfait à cause de quelques suppositions & de quelques abstractions faites pour rendre le problême plus facile, il a du moins cet avantage, qu'il voit la route de l'Auteur & qu'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se flatter d'aller plus loin. Mais quant à ce qui regarde le mouvement de l'apogée & la variation de l'excentricité, & toutes les autres inégalités du mouvement de la Lune, M. *Newton* se contente des résultats qui conviennent aux Astronomes pour construire des tables du mouvement de la Lune, & il assure que sa théorie de la gravité l'a conduit à ces résultats.

XIV.

X I V.

M. *Horox*, célébre astronome Anglois avoit prévenu M. *Newton* sur la partie la plus difficile des mouvemens de la Lune, sur ce qui régarde l'apogée & l'excentricité. On est étonné que ce sçavant dénué du secours que fournissent le calcul & le principe de l'attraction, ait pû parvenir à réduire des mouvemens si composés sous des loix presque semblables à celles de M. *Newton*, & ce dernier si respectable d'ailleurs paroît d'autant plus blamable en cette occasion d'avoir caché sa méthode, qu'il s'exposoit à faire croire que ses théorémes étoient comme ceux des Astronomes qui l'avoient précédé, le résultat de l'examen des observations, au lieu d'être une conséquence qu'il eut tirée de son principe général.

Mr. *Horox* avoit trouvé les loix de l'apogée & de l'excentricité.

C'est dans le scholie de la proposition 35 du 3e. livre que M. *Newton* a donné ces théorémes qui sont presque tout le fondement des tables du mouvement de la Lune. Voici à peu-près en quoi ils consistent.

X V.

Le mouvement moyen de la Lune doit être corrigé par une équation dépendante de la distance du Soleil à la terre. Cette équation appellée annuelle est la plus grande dans le périgée du Soleil & la plus petite dans son apogée. Son maximum est de 11′ 51″ & dans les autres cas elle est proportionelle à l'équation du centre du Soleil. Elle est additive dans les six premiers signes à comter de l'apogée du Soleil, & soustractive dans les six autres signes.

Equations annuelles du mouvement de la Lune de l'apogé & du nœud.

Les lieux moyens de l'apogée & du nœud doivent être aussi corrigés chacun par une équation de même espece, c'est-à-dire, dépendante de la distance du Soleil à la terre & proportionelle à l'équation du centre du Soleil. Celle de l'apogée est 19′ 43″ dans son maximum & est additive du périhélie à l'aphélie de la terre. L'équation est soustractive de l'aphélie au périhélie pour le nœud. Elle n'est que de 9′ 24″ & est prise dans un sens contraire à la premiere.

X V I.

Premiere équation semestre du mouvement moyen de la Lune.

Le mouvement moyen de la Lune doit ensuite souffrir une autre correction, dépendante à la fois de la distance du Soleil à la terre & de la situation de l'apogée de la Lune par rapport au Soleil. Cette équation qui est inversement comme le cube de la distance du Soleil à la terre, & directement comme le sinus du double de l'angle qui exprime la distance du Soleil, à l'apogée de la Lune, s'appelle équation semestre. Elle est de 3′ 45″ lorsque l'apogée de la Lune est en octans avec le Soleil, pendant que la terre est dans sa moyenne distance. Elle est additive quand l'apogée de la Lune va de sa quadrature avec le Soleil à sa sysigie : & soustractive, lorsque l'apogée va de la sysigie à la quadrature.

X V I I.

Seconde équation semestre.

Le même mouvement moyen de la Lune demande une troisiéme correction, dépendante de la situation du Soleil par rapport au nœud, ainsi que de la distance du Soleil à la terre. Cette correction ou équation que M. *Newton* appelle la seconde équation semestre, est inversement proportionelle au cube de la distance de la terre au Soleil, & directement proportionnelle au sinus du double de la distance du nœud au Soleil, elle est de 47″ lorsque le nœud est en octans avec le Soleil, & que la terre est dans ses moyennes distances. On l'ajoute lorsque le Soleil s'écarte en antécédence du nœud le plus proche, & au contraire, on la rétranche lorsqu'il s'en éloigne en conséquence.

X V I I I.

Après ces trois premieres corrections du lieu de la Lune, suit celle qu'on appelle son équation du centre. Mais cette équation ne sauroit être prise comme celle des autres planetes dans une seule & même table, parceque son excentricité varie à tout moment,

& que le mouvement de son apogée est fort irrégulier. Afin donc de parvenir à l'équation du centre de la Lune, il faut commencer par déterminer l'excentricité & le vrai lieu de l'apogée de la Lune, ce que l'on fait par le moyen de tables fondées sur la proposition suivante.

Ayant pris une droite quelconque pour exprimer la moyenne excentricité de l'orbite de la Lune laquelle est de 5505 parties, dont la moyenne distance de la Lune à la terre est environ 100000, on fait à l'extrémité de cette droite que l'on prend pour base un angle égal au double de l'argument annuel ou de la distance du Soleil au lieu moyen de la Lune corrigé une premiere fois comme on l'a déja enseigné.

Détermination du vrai lieu de l'apogée & de l'excentricité.

On fixe ensuite la longueur du côté de cet angle en le faisant égal à la moitié de la différence, entre la plus petite & la plus grande excentrité, laquelle est de 1172 $\frac{1}{4}$. Fermant alors le triangle, l'autre angle à la base exprime l'équation ou correction à faire au lieu de l'apogée déja corrigé une fois pour avoir son lieu vrai, & l'autre côté du triangle, c'est-à-dire, celui qui est opposé à l'angle fait égal au double de l'argument annuel, exprimera l'excentricité pour le moment proposé. Ajoutant alors l'équation de l'apogée à son lieu déja corrigé, si l'argument annuel est moindre de 90, ou entre 180 & 270, & la retranchant dans les autres cas on aura le vrai lieu de l'apogée que l'on retranchera du lieu de la Lune, corrigé par les trois équations déja rapportées, afin d'avoir l'anomalie moyenne de la Lune. Ensuite avec cette anomalie & l'excentricité, on aura facilement par les méthodes ordinaires l'équation du centre, & partant le lieu de la Lune, corrigé pour la quatriéme fois.

Usage de l'équation du centre ou quatriéme correctoin du lieu de la Lune.

X I X.

Le lieu de la Lune, corrigé pour la cinquiéme fois, se trouve en appliquant au lieu de la Lune, corrigé pour la quatriéme fois l'équation appellée variation, dont nous avons déja parlé, laquelle

La cinquiéme équation de la Lune est la variation.

eſt toujours en raiſon directe du ſinus du double de l'angle, qui exprime la diſtance de la Lune au Soleil, & en raiſon inverſe du cube de la diſtance de la terre au Soleil. Cette équation qui eſt additive dans le premier, & le troiſiéme quart de cercle, (en comptant du Soleil) & négative dans le deuxiéme & quatriéme, eſt de 35′ 10″ quand la Lune eſt en octans avec le Soleil & la terre dans ſes moyennes diſtances.

XX.

Sixiéme équation.

La ſixiéme équation du mouvement de la Lune eſt proportionnelle au ſinus de l'angle que l'on a en ajoutant la diſtance de la Lune au Soleil à la diſtance de l'apogée de la Lune à celui du Soleil. Son maximum eſt de 2′ 20″ & elle eſt poſitive lorſque la ſomme eſt moindre que 180° & négative, ſi la ſomme eſt plus grande.

XXI.

Septiéme équation.

La ſeptiéme & derniere équation qui donne le lieu vrai de la Lune dans ſon orbite, eſt proportionnelle à la diſtance de la Lune au Soleil; elle eſt de 2′ 20″ dans ſon maximum.

XXII.

On ne voit guéres pour retrouver le chemin qui peut avoir conduit M. *Newton* à toutes ces équations, que quelques corollaires de la propoſition 66 du premier livre, où il donne la maniere d'eſtimer les forces perturbatrices du Soleil, que j'ai expoſé dans ce Chapitre. On ſent bien à la vérité que celle des deux forces qui agit dans le ſens du rayon de l'orbite de la Lune, ſe joignant à la force de la terre, altére la proportion inverſe du quarré des diſtances, & doit changer tant la courbure de l'orbite, que le tems dans lequel la Lune le parcourt: mais comment M. *Newton* a-t'il employé ces altérations de la force centrale, & quels principes a-t'il ſuivi pour éviter ou pour vaincre la complication extrême, & les dif-

ficultés du calcul que présente cette récherche? c'est ce qu'on n'a pas encore pû découvrir du moins d'une maniere satisfaisante.

On trouve, je l'avoue, dans le premiere Livre des Principes, une proposition sur le mouvement des apsides en général, qui promet d'abord de grands usages pour la théorie des apsides de la Lune, mais quand on vient à s'en servir, on voit bientôt qu'elle ne mene pas fort avant dans cette récherche.

La proposition dont je parle apprend que si à une force qui agit inversement comme le quarré des distances, on en ajoute une inversément proportionnelle au cube, cette nouvelle force ne changera pas la nature de la courbe décrite par la premiere force, mais donnera un mouvement circulaire au plan sur lequel elle est décrite, je veux dire que l'addition de la nouvelle force qui suit la raison renversée du cube, fait que le corps au lieu de décrire autour du centre des forces une ellipse sur un plan immobile, comme il l'auroit décrite par la seule force inversement proportionnelle au quarré, décrira la courbe que trace un point mû dans une ellipse, pendant que le plan de cette ellipse tourne lui-même autour du centre des forces. Dans des coroll. de cette proposition, M. *Newton* applique sa conclusion au cas où la force ajoutée à celle qui suit la loi du quarré de la distance, n'est pas restrainte à agir comme le cube, mais comme toute autre quantité dépendante de la distance.

Si donc la force perturbatrice du Soleil se trouvoit dépendre de la seule distance de la Lune à la terre, on iroit tout de suite à la théorie du mouvement des apsides de la Lune, par cette seule proposition: mais comme il entre dans l'expression de cette force l'élongation ou distance de la Lune au Soleil, & qu'outre cela il n'y à qu'une seule partie de la force perturbatrice du Soleil qui agisse suivant la distance de la Lune, on ne peut sans des artifices nouveaux & peut-être aussi difficiles à trouver que la détermination entiere de l'orbite de la Lune, employer la proposition de M. *Newton* sur les apsides en général au cas de la Lune. Aussi sur cet article

comme sur tout le reste de la théorie de la Lune, les plus grands Géometres de ce siécle ont abandonné la route battue jusqu'a présent par les commentateurs de M. *Newton*, & ont crû qu'ils arriveroient plutôt au but en reprenant tout le travail dès sa premiere origine. Ils ont cherché à déterminer directement les chemins & les vitêsses de trois corps quelconques qui s'attirent. On se flatte de voir dans peu le succès de leur travail : la méthode analytique qu'ils suivent, paroit la seule qui puisse vraiment satisfaire dans une recherche de cette nature.



DES COMETES.

I.

Quoique les cométes ayent attiré dans tous les tems l'attention des Philosophes, ce n'est que depuis le siécle dernier & même depuis M. *Newton*, que l'on peut se flatter d'avoir quelque connoissance de leur nature. *Séneque* sembloit avoir pressenti ce qu'on devoit découvrir un jour sur ces astres; mais le germe des vrais principes qu'il avoit semé fut étouffé par la doctrine des Péripatéticiens, qui transmettant de siécle en siécle, les erreurs de leur maitre, soutenoient que les cométes étoient des météores & des feux passagers.

Les Péripatéticiens prenoient les cométes pour des météores.

II.

Quelques Astronomes à la tête desquels on doit mettre *Tycho*, reconnurent la fausseté de cette opinion en faisant voir par leurs observations, que ces astres étoient beaucoup par de-là l'orbe de la Lune.

Tycho reconnut qu'elles étoient par de-là la Lune.

Ils détruisirent en même tems les cieux solides, imaginés par les mêmes philosophes scholastiques, & proposérent des vues sur le Systême du Monde, qui convenoient beaucoup mieux à la raison & aux observations: mais leurs conjectures étoient encore bien loin du but, auquel la géométrie de M. *Newton* pouvoit seule atteindre.

III.

Descartes à qui les sciences sont si redevables, n'avoit pas mieux réussi que ses prédécesseurs dans l'examen des cométes, il ne pensa ni à employer les observations qu'il lui auroit été aisé de rassembler, ni la géométrie à laquelle il auroit dû si naturellement avoir

Descartes en faisoit des planetes errantes de tourbillons en tourbillons.

recours, lui qui l'avoit portée à un si grand point de perfection. Il se contenta de raisonnemens vagues & regarda les cometes comme des astres qui flottoient entre les différens tourbillons, qui composoient suivant lui l'univers, & il n'imagina pas qu'elles suivissent aucune loi dans leurs mouvemens.

I V.

Mr. *Newton* reconnut que les cometes tournoient autour du Soleil & étoient soumises aux mêmes loix que les planetes.

M. *Newton*, éclairé par sa théorie des planetes & par les observations qui lui apprenoient, que les cometes descendoient dans notre Systême solaire, vit bien-tôt que ces astres devoient être des corps de même nature que les planetes, & qu'elles étoient soumises aux mêmes regles.

Tout corps placé dans notre Systême planétaire doit, suivant la théorie du M. *Newton*, être attiré vers le Soleil, par une force réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, laquelle combinée avec une impulsion primitive, donne un orbite qui est toujours une des sections coniques, ayant le Soleil à son foyer. Il falloit donc pour confirmer cette théorie que les cometes n'eussent aucun autre mouvement que ceux que l'on peut rapporter à ces courbes, & que les aires parcourues par elles autour du Soleil, fussent proportionnelles aux tems de leur description.

V.

Il détermina l'orbite d'une cométe quelconque par trois observations.

Le calcul & les observations, guides fideles de ce grand homme, lui aiderent facilement à vérifier cette conjecture. Il résolut ce beau problême astronomico-géométrique : trois lieux d'une cométe, que l'on suppose se mouvoir dans une orbe parabolique, en décrivant autour du Soleil des aires proportionnelles aux tems, étant donnés avec les lieux de la terre pour les mêmes tems, trouver la position de l'axe, du sommet & le paramétre de la parabole, ou, ce qui revient au même trouver l'orbite de la cométe.

Ce problême, déja très difficile dans l'orbite parabolique, auroit été

été si embarassant dans le cas de l'ellipse & de l'hyperbole, qu'i étoit à propos de le réduire à ce dégré de difficulté. D'ailleurs l'hypothèse de l'ellipse, la seule vraisemblable, revenoit pour la pratique à peu près au même que celle de la parabole, parceque les cométes n'ayant qu'une petite partie de leurs orbites à portée de nos observations, doivent suivre des ellipses fort allongées, & on sait que de telles courbes peuvent dans la partie la plus voisine de leur foyer être prises sans erreur sensible pour des paraboles.

VI.

M. *Newton* ayant donc résolu le probléme dont nous venons de parler, l'appliqua à toutes les cométes observées, & il en tira la confirmation compléte de sa conjecture. Car tous les lieux déterminés par le calcul d'après trois longitudes & latitudes de l'astre, se trouvérent si proches des lieux trouvés immédiatement par les observations, qu'on est étonné de leur accord quand on connoit la difficulté d'atteindre à la précision des observations de cette nature.

Il vérifia son calcul par les observations d'un grand nombre de cométes.

VII.

Quant à la durée des périodes des cométes, elle ne peut pas se tirer du même calcul, parceque comme nous venons de le dire, leurs orbites étant si allongées qu'on peut les prendre sans erreur considérable pour des paraboles, des différences excessives dans leur durée ne produiroient presque pas le moindre changement à leurs apparences, dans l'arc de leur orbite que nous connoissons. Mais il n'en est pas moins satisfaisant pour la théorie de M. *Newton*, de voir que dans cette partie où elles sont visibles, elles observent exactement la loi de *Kepler*, des aires proportionnelles aux tems, & que le Soleil les attire, ainsi que tous les autres corps célestes en raison renversée du quarré de leur distance.

La durée de leur période ne se peut trouver qu'en trouvant dans l'histoire des apparitions des cométes dans les mêmes circonstances & à intervalles égaux.

VIII.

M. *Halley*, à qui toutes les parties de l'astronomie doivent tant, & qui a porté si loin la doctrine des cométes, a fait à l'occasion

de la fameuſe Cométe de 1680, une recherche bien ſatisfaiſante pour M. *Newton*. Trouvant que trois obſervations de cométes dont l'hiſtoire fait mention, convenoient avec celle-ci dans des circonſtances remarquables, & qu'elles avoient reparû à la diſtance de 575 ans l'une de l'autre : il ſoupçonna que ce pouvoit être une ſeule & même cométe, faiſant ſa révolution autour du Soleil dans cette période. Il ſuppoſa donc la parabole changée en une ellipſe telle que la cométe qui la parcourroit mettroit 575 ans à la décrire, & que ſa courbure fut aſſez conforme avec la parabole dans la partie de ſon orbite voiſine du Soleil.

M. *Halley* a employé la période de celle de 1680 à rectifier l'orbite de cette cométe.

Ayant enſuite calculé les lieux de la cométe dans cette orbite elliptique, il les trouva ſi conformes avec ceux où la cométe fut obſervée, que les variations n'excédérent pas la différence qu'on trouve entre les lieux calculés des planétes & ceux que l'on a par obſervation, quoique le mouvement de ces dernieres ayent été l'objet des recherches des aſtronomes pendant des milliers d'années.

IX.

La cométe de 1680 ayant une période d'une durée ſi conſidérable, ſon retour qui ne doit arriver que vers l'an 2255, ne fait pour nous qu'une prédiction peu intéreſſante. Mais il y a une autre cométe dont le retour eſt ſi prochain, qu'elle promet un ſpectacle bien agréable aux Aſtronomes de ce tems : c'eſt la cométe qui parut en 1682, laquelle offrit des circonſtances ſi ſemblables à celles de la cométe qui parut en 1607, qu'on ne ſauroit gueres s'empêcher de croire que ce ne ſoit une ſeule & même planéte, faiſant ſa révolution en 75 ans autour du Soleil. Si cette conjecture ſe trouve vérifiée, nous verrons reparoître la même cométe en 1758, & ce ſera un moment bien flateur pour les partiſans de M. *Newton*. Cette cométe ſemble être du nombre de celles qui s'éloignent le moins de notre Syſtême, car dans ſa plus grande diſtance du Soleil, elle ne s'écarte pas quatre fois plus de nous que Saturne, ſi elle eſt viſible lorſqu'elle repaſſera dans la partie inférieure de ſon orbite en 1758, on ne balancera pas à la compter au nombre des planétes.

La cométe de 1682 doit reparoître en 1758.

X.

Les queues des cométes qui ont fait regarder autrefois l'apparition de ces astres comme des présages facheux, sont mises maintenant au nombre de ces phénoménes ordinaires, qui n'excitent l'attention que des seuls philosophes. Quelques-uns ont prétendu que les rayons du Soleil passant au travers du corps de la cométe, qu'ils supposoient transparent produisoient l'apparence de leurs queues, de même que nous appercevons l'espace que traversent les rayons du Soleil, passant par le trou d'une chambre obscure. D'autres ont imaginé que les queues étoient la lumiere de la cométe, réfractée en arrivant à nous & produisant une image allongée de la même maniere que le Soleil en produit par la réfraction du prisme. M. *Newton*, après avoir rapporté ces deux opinions & les avoir réfutées, rend compte d'une troisiéme qu'il a admise lui-même. Elle consiste à regarder la queue de la cométe comme une vapeur qui s'éleve continuellement du corps de la cométe vers les parties opposées au Soleil, par la même raison que les vapeurs ou la fumée s'élevent dans l'athmosphére de la terre, & même dans le vuide de la machine pneumatique. A cause du mouvement du corps de la cométe, la queue est un peu courbée vers le lieu où le noyau a passé, à peu près comme fait la fumée qui s'éleve d'un charbon ardent que l'on fait mouvoir.

Différentes opinions sur les queues des cométes.

Mr. *Newton* prétend qu'elles ne sont qu'une fumée qui s'exhale du corps de la cométe.

X I.

Ce qui confirme encore cette opinion, c'est que les queues se trouvent toujours les plus grandes, lorsque la cométe sort de son périhélie, c'est-à-dire du lieu où elle est à sa moindre distance du Soleil, où elle reçoit le plus de chaleur & où l'athmosphére du Soleil est dans sa plus grande densité. La tête paroit après cela obscurcie par la vapeur épaisse qui s'en éleve abondamment, mais l'on découvre au centre une partie beaucoup plus lumineuse que le reste, qui est ce que l'on nomme le noyau.

Ce qui confirme cette opinion.

XII.

Usage de ces queues suivant M. *Newton*.

Une grande partie des queues des cométes doit se répandre par cette raréfaction dans le Systême solaire : une portion par sa gravité peut tomber vers les planétes, se mêler avec leur athmosphére & remplacer les fluides qui se consument dans les opérations de la nature.

XIII.

Les cométes pourroient subir de grandes altérations dans les extrémités de leurs orbes.

Si on considere tout ce qui peut agir sur les cométes dans les parties les plus éloignées de leurs orbites, où la force du Soleil sur elles devient extrêmement foible, & où elles peuvent être dans le voisinage d'autres corps céleſtes, on voit que la permanence de leur période n'est pas aussi indispensable que dans les planétes. Si donc il arrivoit que quelques-unes des cométes que nous attendons ne reparussent pas, cela feroit beaucoup moins de tort au Systême *Newtonien*, que ce Systême n'a tiré d'illustration par leur constance à suivre toutes la premiere regle de *Kepler*, celle des espaces proportionnels aux tems.

XIV.

Quelques-unes des cométes pourroient bien tomber dans le Soleil.

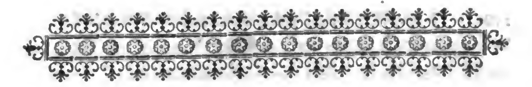
La résistance que les cométes rencontrent en traversant l'athmosphére du Soleil, lorsqu'elles sont dans les parties inférieures de leurs orbites peut encore altérer leurs mouvemens, les ralentir de révolution en révolution, & les faire approcher de plus en plus du Soleil, jusqu'à ce qu'enfin elles soient englouties dans cet immense globe de feu.

La cométe de 1680, passa à une distance de la surface du Soleil, qui n'excedoit pas la sixiéme partie du diamétre de ce globe, il est vraisemblable qu'elle en approchera encore plus près dans la révolution suivante, & qu'elle tombera enfin tout-à-fait sur le Soleil.

XV.

Conjectures de M. *Newton* sur des changemens considérables arrivés à des étoiles fixes.

M. *Newton* soupçonne que des étoiles dont la lumiere a paru quelquefois s'affoiblir considérablement, & qui ont ensuite paru brillantes, ont pû tirer leur nouvel éclat de la chute de quelque cométe qui est venue servir d'aliment à leur feu.



SOLUTION
ANALYTIQUE DES PRINCIPAUX Problêmes qui concernent le Syſtême du Monde.

SECTION PREMIERE.
Des Trajectoires dans toutes ſortes d'hypothèſes de peſanteur.

I.

PROPOSITION I. THEORÊME I.

SI un corps part d'un point quelconque avec une vîteſſe & une direction données, & qu'il ſoit continuellement ſollicité vers un centre par une force qui agiſſe ſuivant une loi quelconque des diſtances à ce centre, tous les eſpaces renfermés entre deux rayons quelconques (qu'on appelle rayons vecteurs) *& l'arc de la courbe qu'ils comprennent, ſont égaux, lorſque les arcs qui les terminent ſont parcourus en tems égal.*

Si le corps étant parti de M, ſe trouvoit en m au bout du premier inſtant, & que la force qui le porte dans la ligne Mmn, agit ſeule ſur lui, ce corps par ſon inertie ſeroit en n à la fin du ſecond inſtant égal au premier; car on ſuppoſe $Mm = mn$; mais le corps étant continuellement ſollicité vers le centre C, obéira à chacune de ces deux forces ſelon la quantité de leur action ſur lui : exprimant donc la force qui le porte vers C par $n\mu$, le corps au lieu d'être en n à la fin du ſecond inſtant, ſera en μ, & parcourra la diagonale $m\mu$ du parallélogramme $mn\mu o$ fait ſur les forces mn & $n\mu$. Fig. 1.

Les triangles CMm, Cmn ayant des baſes égales ſont égaux :

les triangles Cmn, $Cm\mu$ qui ont la même base & qui sont entre mêmes parallèles sont aussi égaux; donc le triangle $CMm =$ le triangle $Cm\mu$: or comme on peut faire le même raisonnement sur tous les triangles ou secteurs que le corps peut décrire autour du centre C dans des instans égaux, les sommes de ces petits triangles, ou les secteurs finis composés de ces petits secteurs seront proportionnels aux nombres des instans, ou aux tems entiers dans lesquels ils seront parcourus. *C. Q. F. D.*

Cette proposition est la premiere du Livre des Principes, & c'est ce qu'on appelle *la premiere analogie de Kepler*.

I I.

PROPOSITION II. THEORÊME II.

Si un corps parcourt autour d'un centre des aires proportionnelles au tems, ses vîtesses aux différens points de la courbe qu'il décrit seront en raison réciproque des perpendiculaires tirées du centre sur les tangentes à ces points.

Fig. 1. Les triangles ou secteurs CMm, CNn décrits en tems égal, sont égaux par la Prop. 1. Ainsi $\frac{CH \times Mm}{2} = \frac{CI \times Nn}{2}$, d'où l'on tire $Mm : Nn :: CI : CH$; mais $Mm : Nn$ comme la vîtesse par Mm est à la vîtesse par Nn, puisque ces petites portions de courbe sont parcourues en tems égal par l'hypothèse; donc les vîtesses sont entr'elles en raison inverse des perpendiculaires. *C. Q. F. D.*

I I I.

PROPOSITION III. THEORÊME III.

Les forces par lesquelles le corps révolvant autour du centre C *est attir vers le centre en deux lieux quelconques* m *&* P *de la courbe* M P π *sont entr'elles comme les petites flèches* n μ & p π, *lorsque les secteurs* C m μ, C P π *sont égaux, & si ces secteurs ne sont pas de même superficie, les forces seront comme les flèches* n μ, p π *divisées par les quarrés des secteurs* C m μ, C P π.

La premiere partie de cette propofition, fçavoir que, quand les fecteurs font égaux, on a $F : \varphi :: n\mu : p\pi$ eft fi claire par elle-même, & fuit avec une telle évidence de la prop. 1. qu'elle n'a pas befoin d'être démontrée. Fig. 3.

Quant à la feconde partie, c'eft-à dire, que lorfque les fecteurs font inégaux, on a $F : \varphi :: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{CP\pi}^2}$, en voici la démonftration.

Je fais le fecteur $Cm\theta$ égal au fecteur $CP\pi$, & alors on aura par la premiere partie de cette propofition $F : \varphi :: \epsilon\theta : p\pi$; j'ai donc à prouver que $\epsilon\theta : p\pi :: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{CP\pi}^2}$ ou $:: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{Cm\theta}^2}$ c'eft-à-dire, que $\epsilon\theta : n\mu :: \overline{Cm\theta}^2 : \overline{Cm\mu}^2$, ou enfin que $\epsilon\theta : n\mu :: \overline{m\theta}^2 : \overline{m\mu}^2$: mais à caufe des triangles femblables $on\mu$, $h\epsilon\theta$ on a $n\mu : \epsilon\theta :: o\mu . \theta h$, la feconde partie de cette propofition fera donc prouvée, fi on fait voir que $o\mu : \theta h :: \overline{m\mu}^2 : \overline{m\theta}^2$, ce qui fera facile en regardant $m\mu\theta$ comme un petit arc de cercle. Car les petits arcs $m\mu$, $m\theta$ étant pris pour leurs cordes, on fçait que leurs quarrés doivent être entr'eux comme leurs finus verfes. *C. Q. F. D.*

I V.

S C H O L I E.

Les efpaces étant proportionnels aux tems, la propofition précédente peut encore s'énoncer ainfi. *Les forces en deux lieux differens d'une même courbe font entr'elles en raifon directe des fléches qu'elles font parcourir, & inverfe des quarrés des tems dans lefquels elles font parcourues.* Sous cet énoncé la propofition a cet avantage qu'elle convient également au cas où l'on compare les forces en deux lieux de la même courbe, & celui où il s'agit de les comparer dans deux points de différentes courbes. La démonftration en eft facile en combinant ces deux propofitions : car fi l'on prend les tems égaux dans les deux courbes, les forces font comme les fléches, &

si on les suppose inégaux dans la même courbe, les fléches divisées par les quarrés des tems représentent les forces.

V.

PROPOSITION IV. THEORÉME IV.

Trouver l'expression générale des fléches $n\mu$.

Je tire les tangentes HM, hm aux points M & m, & du centre C j'abaisse sur les tangentes les perpendiculaires CH, Ch, ayant mené ensuite μK perpendiculaire sur mn, décrit l'arc de cercle Dd du rayon quelconque CD. Je fais $CH = p$. $ho = dp$. $AM = s$. $Mm = ds$. $CM = y$. $mR = dy$. $CD = 1$. $Dd = dx$. Les triangles semblables CHM, MRm donnent $CM : HM :: Mm. Rm$, c'est-à-dire, $y : HM :: ds : dy$, donc $\frac{ydy}{ds} = HM = om$: D'un autre côté les triangles semblables hom, $mK\mu$ donnent $om : ho :: m\mu : K\mu$, c'est-à-dire, $\frac{ydy}{ds} : dp :: ds : \frac{dpds^2}{ydy} = K\mu$. Enfin l'on a par les triangles semblables MRm, $Kn\mu$; $MR : Mm :: K\mu : n\mu$, c'est-à-dire, $ydx : ds :: \frac{dpds^2}{ydy} : \frac{dpds^3}{y^2dydx} = n\mu$. *C. Q. F. T.*

V I.

COROLLAIRE I.

Les triangles semblables CHM, MRm donneront la valeur de p ou de CH : car on aura $Mm : MR :: CM : CH$, c'est-à-dire $ds : ydx :: y : \frac{yydx}{ds} = p$, donc l'expression précédente $\frac{dpds^3}{yydxdy}$ peut s'écrire ainsi $\frac{dpds^2}{pdy} = n\mu$.

V I I.

COROLLAIRE II.

On a trouvé (Art. 3.) que l'expression de la force centripéte aux

aux différens points de la même courbe eſt $\frac{\mu n}{C m \mu}$, mais les ſecteurs $C m \mu$ ont pour valeur $p d s$, donc la force centripéte eſt proportionnelle à $\frac{\frac{d p d s^2}{p d y}}{p p d s^2}$ qui ſe réduit à $\frac{d p}{p^3 d y}$ expreſſion générale de la force centripéte à un point quelconque de la courbe décrite.

VIII.

COROLLAIRE III.

L'expreſſion générale de la petite fléche μn étant (art. 6.) $\frac{d p d s^2}{p d y}$, puiſqu'on a trouvé (Article 6.) que quand on veut comparer les forces dans les courbes différentes, lorſque les temps ſont différens, ces forces ſont entr'elles comme les fléches diviſées par les quarrés des temps; l'expreſſion générale pour comparer les forces dans deux courbes différentes, quand les tems ſont inégaux, eſt $\frac{d p d s^2}{p d y d t^2}$.

IX.

PROPOSITION V. PROBLEME II.

Trouver l'expreſſion de la force centripéte dans l'ellipſe, en prenant un des foyers pour centre des forces.

L'équation polaire * de l'ellipſe par rapport au foyer, eſt

* Voici comment on trouve cette équation. Soit l'ellipſe $A B H$, je tire du foyer C la ligne $C M$, j'abaiſſe $M Q$ perpendiculaire ſur l'axe $A H$ & du Pôle C comme centre, & du rayon $C O$ pris à volonté je trace l'arc de cercle $O P$, je fais enſuite les lignes $C O = 1$. $D Q = u$. $A D = a$. $D B = b$. $C M = y$. $C D = c$. $D E = \frac{a a}{c}$. $C Q = c + u$. On a par les ſections coniques $C M : L M :: A C : A E$, c'eſt-à-dire $y : \frac{a a}{c} + u :: a - c : \frac{a a - a c}{c}$; donc $y = C M = \frac{a a + c u}{a}$, d'où on tire $u = \frac{a y - a a}{c}$: donc $\frac{C Q}{C M}$ ſinus de l'angle $O C P$ que je nomme Fig. 5.

$dx = \frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay-yy-bb}}$; ainſi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{2ay-yy}}{\sqrt{2ay-yy-bb}}$: donc la perpendiculaire p ou $\frac{yy\,dx}{ds}$ ſera $= \frac{by}{\sqrt{2ay-yy}}$ & par-conſéquent $dp = \frac{aby\,dy}{\overline{2ay-yy}^{\frac{3}{2}}}$; donc $\frac{dp}{p^3\,dy}$ qui eſt (art. 7.) l'expreſſion générale de la force centripéte devient en ce cas $\frac{a}{bbyy}$. *C. Q. F. T.*

On voit donc que dans cette courbe la force centripéte agit en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au centre des forces.

X.

PROPOSITION VI. THEORÉME IV.

Si deux corps attirés par une même force centrale décrivent deux ellipſes, leurs vîteſſes dans leur moyenne diſtance du centre ſeront en raiſon renverſée des racines de ces moyennes diſtances.

Fig. 6. 7. Soient deux ellipſes ADB, $A'D'B'$ ayant pour centres C & C' pour foyers F & F'; $FD = AC$, $F'D' = A'C'$, pour moyennes diſtances à leur foyer F & F'; DK, $D'K'$, pour rayons de la développée au point D & D' : on ſçait que eg eſt troiſiéme proportionnelle à DK & à Dd, de même que $e'g'$ à $D'K'$ & $D'd'$; faiſant donc les lignes $FD = a$. $F'D' = a'$. $FL = b$. $F'L' = b'$. $Dd = ds$. $D'd' = ds'$. $DK = \frac{aa}{b}$. $D'K' = \frac{a'a'}{b'}$. on aura $eg = \frac{b\,ds^2}{aa}$ & $e'g' = \frac{b'\,ds'^2}{a'a'}$: mais les triangles ſemblables LFD, efg : $L'F'D'$,

s, aura pour valeur $\frac{ay-bb}{cy}$, donc $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}}$ ou dx ſera $\frac{d\left(\frac{ay-bb}{cy}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{(ay-bb)^2}{c^2y^2}\right)}}$

ou $\frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay-yy-bb}}$?

$e'f'g'$ donneront $eg:fg::LF::FD$ & $e'g':f'g'::L'F':F'D'$, c'eſt-à-dire $\frac{bds^2}{aa}:fg::b:a$, & $\frac{b'ds'^2}{a'a'}:f'g'::b':a'$, donc $fg = \frac{ds^2}{a}$ & $f'g' = \frac{ds'^2}{a'}$, ce qui donne $ds^2:ds'^2::a \times fg:a' \times f'g'$; mais les fléches fg & $f'g'$ proportionnelles aux forces ſont entr'elles, par ce qu'on vient de trouver, dans la raiſon de $\frac{1}{aa}$ à $\frac{1}{a'a'}$, donc $ds^2:ds'^2::\frac{1}{a}:\frac{1}{a'}$, ou, ce qui revient au même, $ds:ds'::\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{a'}}$, & comme les petits eſpaces ds, ds' ſont entr'eux dans la même raiſon que les vîteſſes qui les font parcourir, on aura donc, la vîteſſe en D : la vîteſſe en $D'::\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{a'}}$, c'eſt à-dire en raiſon renverſée des moyennes diſtances. *C. Q. F. D.*

X I.

PROPOSITION VII. THEORÊME V.

Les tems périodiques dans deux courbes différentes ſont entr'eux comme les racines quarrées des cubes des moyennes diſtances au centre, lorſque l'intenſité des forces eſt la même.

Gardant les mêmes dénominations que dans la propoſition précédente, $\frac{1}{2bds}$ ſera l'expreſſion du petit triangle ou ſecteur FDd, & $\frac{1}{2abc}$ celle de l'aire entiere de l'ellipſe (c exprimant le rapport de la circonférence au rayon.) On aura donc en nommant dt le temps par Dd, & T le temps total; $dt:T::\frac{1}{2}bds:\frac{1}{2}abc$; mais au lieu de ds on peut mettre udt; donc $dt:T::udt:ac$; d'où l'on tire $T=\frac{ac}{u}$, c'eſt-à-dire, les temps en raiſon directe des moyennes diſtances, & en raiſon renverſée des vîteſſes : mais (Article 10.) les vîteſſes dans les ellipſes en D & D' ſont en

raiſon renverſée des racines des moyennes diſtances, lorſque l'intenſité des forces eſt la même ; donc les temps périodiques ſont comme les racines quarrées des cubes des moyennes diſtances, lorſque l'intenſité des forces eſt la même. *C. Q. F. D.*

Cette propoſition démontre ce qu'on appelle la ſeconde analogie de *Kepler*.

X I I.

PROPOSITION VIII. PROBLÊME III.

Comparer les vîteſſes dans deux courbes, lorſque l'intenſité des forces eſt différente.

Fig. 8. 9. Je ſuppoſe d'abord l'ellipſe *A M* parcourue dans le cas où la force centrale a pour intenſité n, c'eſt-à-dire, lorſque la force en M eſt exprimée par $\frac{n}{yy}$ ($CM = y$). Je ſuppoſe enſuite cette courbe parcourue dans le cas où la force feroit $\frac{n'}{yy}$, & je commence par chercher en quelle raiſon la vîteſſe au point M dans le premier cas, doit être à la vîteſſe au même point dans le ſecond cas.

L'expreſſion $\frac{\mu n}{dt^2}$ qui déſigne (Article 4.) en général la force centripéte, ſera dans le premier cas $\frac{n}{yy}$, & dans le ſecond $\frac{n'}{yy}$, ou, ce qui revient au même, à cauſe de $dt^2 = \frac{ds^2}{u^2}$ on aura $\frac{\mu n \times u^2}{ds^2} = \frac{n}{yy}$ ou $u^2 = \frac{n\,ds^2}{yy \times \mu n}$ dans le premier cas, & $u'^2 = \frac{n'\,ds'^2}{yy \times \mu n}$ dans le ſecond ; mais y, ds, μn étant les mêmes dans ces deux cas, puiſque c'eſt la même courbe, on aura alors $u : u' :: \sqrt{n} : \sqrt{n'}$: De plus on a vû (Prop. 6.) que dans deux ellipſes différentes, la vîteſſe u en M eſt à la vîteſſe u' en M', lorſque l'intenſité de la force eſt la même, comme $\frac{1}{\sqrt{CM}}$ à $\frac{1}{\sqrt{C'M'}}$,

compoſant

composant donc ces deux propositions ensemble, on verra que dans deux courbes différentes, & dans lesquelles l'intensité de la force est différente, on aura $u : u' :: \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{CM}} : \frac{\sqrt{n'}}{\sqrt{C'M'}}$ *C. Q. F. T.*

XIII.

PROPOSITION IX. PROBLÊME IV.

Trouver les temps périodiques dans deux ellipses différentes, lorsque l'intensité des forces est aussi différente. Fig. 8. 9.

Lorsque dans la même courbe l'intensité de la force est différente, on a (Article 12.) $u : u' :: \sqrt{n} : \sqrt{n'}$; or, puisque $dt = \frac{ds}{u}$, on aura $\frac{1}{\sqrt{n}} : \frac{1}{\sqrt{n'}} :: dt : dt'$, & par conséquent $:: t : t'$, c'est-à-dire que les temps périodiques sont inversement comme les racines des intensités des forces, lorsque les courbes sont les mêmes. Mais (Article 11.) lorsque les intensités sont les mêmes & les courbes différentes, les tems périodiques sont comme $CM^{\frac{3}{2}}$ & $C'M'^{\frac{3}{2}}$, composant donc ces deux raisons, on aura les tems périodiques dans la raison de $\frac{CM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$ à $\frac{C'M'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n'}}$ lorsque les intensités & les ellipses sont différentes. *C. Q. F. T.*

XIV.

COROLLAIRE.

Puisque dans deux ellipses différentes, & avec des forces d'intensité différente, on a $T : T' :: \frac{CM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} : \frac{C'M'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n'}}$, on aura $CM : C'M' :: \sqrt[3]{T^2 n} : \sqrt[3]{T'^2 n'}$, c'est-à-dire, que les moyennes distances seront entr'elles, comme les racines cubes des quarrés des tems périodiques, multipliées par les racines cubes des masses. Fig. 8. 9.

X V.

PROPOSITION X. PROBLEME V.

Trouver l'expreſſion de la force centripéte dans l'hyperbole, en prenant un foyer pour centre des forces.

L'équation polaire * de l'hyperbole eſt pour le foyer $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{2ay+yy-bb}}$, ainſi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{2ay+yy}}{\sqrt{2ay+yy-bb}}$ & par conſéquent p ou $\frac{yydx}{ds} = \frac{by}{\sqrt{2ay+yy}}$, ce qui donne $dp = \frac{abydy}{(2ay+yy)^{\frac{3}{2}}}$, donc $\frac{dp}{p^3dy}$ qui eſt l'expreſſion générale de la force centripéte trouvée (Article 7.) devient lorſque la courbe eſt une hyperbole $\frac{a}{bbyy}$, c'eſt-à-dire que dans cette courbe comme dans l'ellipſe, la force agit dans la raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

X V I.

PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

Trouver l'expreſſion de la force centripéte dans la parabole, lorſque le foyer eſt le centre des forces.

Fig. 10. * Voici comment on trouve cette équation. Soit l'hyperbole CM, je tire du foyer F la ligne FM, j'abaiſſe MQ perpendiculaire ſur l'axe AH, & du pôle F comme centre je trace l'arc de cercle OP, enſuite je fais les lignes $CQ = u$. $FM = y$. $AF = c$. $AC = a$. $AB = b$. $AE = \frac{aa}{c}$. $CF = c - a$. On a par les ſections coniques, $FM : LM :: FC : CE$, c'eſt-à-dire, $y : \frac{ac+cu-aa}{c} :: c-a : \frac{ac-aa}{c}$, donc $y = FM = \frac{cu+ac-aa}{a}$, d'où on tire $u = \frac{ay-ac+aa}{c}$; donc $\frac{FQ}{FM}$, ou le ſinus de l'angle FMQ que je nomme s, ſera $= \frac{ay-bb}{cy}$ qui donne $ds = \frac{bbdy}{cyy}$, $\sqrt{1-ss} = \frac{b}{cy}\sqrt{2ay+yy-bb}$, & partant dx ou $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}} = \frac{bdy}{y\sqrt{2ay+yy-bb}}$.

L'équation polaire * de la parabole, eſt pour le foyer $dx = \frac{c\,dy}{y\sqrt{cy-cc}}$, ainſi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{cy}}{\sqrt{cy-cc}}$, & par conſéquent p ou $\frac{yy\,dx}{ds}$ ſera $= \sqrt{cy}$ qui donne $dp = \frac{c\,dy}{2\sqrt{cy}}$, donc $\frac{dp}{p^3\,dy}$ qui eſt (Art. 7.) l'expreſſion générale de la force centripéte à un point quelconque d'une courbe quelconque, devient ici $\frac{1}{cyy}$; donc la force centripéte dans la parabole, lorſque le centre des forces eſt dans le foyer, eſt encore en raiſon renverſée du quarré de la diſtance. *C. Q. F. T.*

XVII.

PROPOSITION XII. PROBLÉME VII.

Trouver la courbe décrite par un corps qu'on ſuppoſe parti d'un point donné avec une viteſſe & une direction données, lorſque ce corps eſt continuellement ſollicité vers un centre par une force qui agit comme une fonction quelconque de la diſtance à ce centre, & dont l'intenſité eſt donnée.

On a trouvé (Art. 8.) que lorſqu'on veut comparer la force dans deux courbes différentes, l'expreſſion eſt $\frac{dp\,ds^2}{p\,dy\,dt^2}$. Lorſque les tems ſont inégaux, il faut commencer par chaſſer l'élément dt^2 par les conditions du problême qu'on ſe propoſe actuelle-

* Voici comment on trouve cette équation. AM repréſentant la parabole propoſée, FM une ligne tirée de ſon foyer à un de ſes points quelconques M, MQ une perpendiculaire abbaiſſée de M ſur l'axe AH, OP un arc de cercle décrit d'un rayon quelconque, on fera les lignes $AQ = u$. $FM = y$. $AF = c$. $FO = 1$. & l'on aura y ou $FM = u + c$, ou $u = y - c$, & par conſéquent $\frac{FQ}{FM}$ ou le ſinus de FMQ que j'appelle s, ſera $\frac{y-2c}{y}$, qui étant ſubſtitué dans l'équation $dx = \frac{ds}{\sqrt{1-ss}}$ donnera $dx = \frac{c\,dy}{y\sqrt{cy-cc}}$. *C. Q. F. T.* Fig. 11.

ment, qui sont, que la vîtesse & la direction du corps soient données au point d'où il part.

Fig. 12. Je fais les lignes $M\mu = ds$. $CR = p$. La vîtesse au point P d'où part le corps $= f$. Le rayon vecteur en ce point $CP = h$. La perpendiculaire à la tangente au même point $CQ = l$. Par l'Art. 1. les secteurs sont proportionnels aux temps : ainsi on aura $CPp : CM\mu :: \frac{Pp}{f} : \frac{pds}{lf} =$ au temps par l'arc $M\mu = dt$, donc $\frac{dpds^2}{pdydt^2}$ devient $\frac{l^2f^2dp}{p^3dy}$. Il faut égaler à présent cette expression générale d'une force quelconque, à la fonction de y, qu'on suppose exprimer la force par les conditions du Problême.

Soit pris Y pour représenter cette fonction, on aura pour l'équation de la courbe cherchée $\frac{l^2f^2dp}{p^3dy} = Y$, ou $Ydy = \frac{l^2f^2dp}{p^3}$ qu'il ne s'agit plus que d'intégrer, ce qui donne $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, dans laquelle équation B est une constante ajoutée ; or p est $= \frac{yydx}{\sqrt{yydx^2 + dy^2}}$ & partant $\frac{1}{p^2} = \frac{yydx^2 + dy^2}{y^4dx^2}$, on aura donc $\frac{2By^4 - 2y^4\int Ydy}{l^2f^2} - yy = \frac{dy^2}{dx^2}$, ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Ydy}{l^2f^2} - 1}}$, équation différentielle par laquelle on construira la courbe, aussi-tôt qu'on connoîtra Y. C. Q. F. T.

XVIII.

COROLLAIRE I.

On vient de trouver $\frac{pds}{lf}$ pour la valeur de l'instant, que le corps

corps met à parcourir un arc infiniment petit $M\mu$, donc $\frac{\int p\,ds}{lf}$ ou $\frac{\int yy\,dx}{lf}$ sera la valeur du temps total employé à parcourir un arc fini quelconque PM; mettant donc dans cette valeur du temps total $\frac{\int yy\,dx}{lf}$ au lieu de dx, sa valeur trouvée dans cette présente proposition $\frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Ydy}{l^2 f^2} - 1}}$, on aura pour l'expression générale du temps employé à parcourir un arc fini quelconque l'integr. de $\frac{y\,dy}{\sqrt{2Byy - 2yy\int Ydy - l^2 f^2}}$.

X I X.

COROLLAIRE II.

Pour déterminer la quantité B par les conditions du Problême, on reprendra l'équation $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$, on mettra dans cette équation à la place de $\int Ydy$, la quantité qui vient après l'intégration qu'on aura fait d'abord qu'on aura connu la fonction des distances qu'exprime Y; ensuite on fera $l = p$ & $y = h$, & on aura par ce moyen une équation qui ne contiendra que B & des constantes, & qui donnera par conséquent la valeur de B.

X X.

PROPOSITION XII. PROBLÊME VIII.

Trouver la courbe que le corps décrira, en supposant $Y = \frac{n}{yy}$.

On aura alors $\int Ydy = \frac{\int n\,dy}{yy} = -\frac{n}{y}$, ainsi l'équation gé- Fig. 12.

nérale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2y^2\int Ydy}{l^2f^2} - 1}}$ deviendra $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy + 2ny}{l^2f^2} - 1}}$. Afin de pouvoir comparer la lettre f qui marque la vîtesse au point P d'où part le corps, avec la lettre n qui marque l'intensité de la gravité dans la supposition présente, supposons que cette vîtesse f soit celle que le corps, en partant du point donné P où le corps est supposé en repos, a acquis en tombant de la hauteur K, étant poussé constamment par la force $\frac{n}{hh}$ que devient la force $\frac{n}{yy}$, lorsque $y = h$, alors en employant ce Théoréme * si connu, qu'un corps qui tombe de la hauteur K, & qui est poussé constamment par une force φ, acquiert la vîtesse $\sqrt{2\varphi K}$, on aura dans le cas présent où la force est $\frac{n}{hh}$, $f = \sqrt{\frac{2nK}{hh}}$.

Si l'on exécute à présent l'Article dix-neuviéme pour avoir la valeur de B, l'équation $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$ dans la supposition présente de la force $= \frac{n}{yy}$ deviendra $\frac{2B + \frac{2n}{y}}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$ mettant p pour l, & h pour y, on aura $2B + \frac{2n}{h} = f^2$, donc $2B = f^2 - \frac{2n}{h}$.

* Voici comme on démontre ce Théoréme. La force par l'instant dt ou $\frac{dK}{u}$ (u étant la vîtesse) est égale à l'increment du de la vîtesse; donc $\frac{\varphi dK}{u} = du$, ou $\varphi dK = udu$, ou $2\varphi K = uu$ en supposant la vîtesse $= o$, au point de départ P : or de $2\varphi K = uu$, on tire $u = \sqrt{2\varphi K}$. *C. Q. F. D.*

Par ce moyen l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy+2ny}{l^2f^2}-1}}$ se

changera, en y mettant pour $2B$ sa valeur $f^2 - \frac{2n}{h}$, en $dx =$

$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{\left(f^2-\frac{2n}{h}\right)y^2+2ny}{l^2f^2}-1}}$, mais on vient de voir que

dans la supposition présente $f = \sqrt{\frac{2nK}{hh}}$, donc en mettant dans

cette équation pour f^2 sa valeur $\frac{2nK}{hh}$, on aura $dx =$

$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K-h)y^2+h^2y}{Kl^2}-1}}$ pour l'équation générale de toutes

les trajectoires qui peuvent être décrites, lorsque la force centripéte agit en raison inverse du quarré des distances. *C. Q. F. T.*

XXI.

PROPOSITION XIII. THEORÉME VI.

Réduction de l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K-h)y^2+h^2y}{Kl^2}-1}}$ *aux équations des sections coniques.*

On peut supposer $h >, =$ ou $< K$; dans le premier cas, le terme $(K-h)yy$ deviendra négatif, & alors l'équation exprimera une ellipse dont le grand axe sera $\frac{hh}{h-K}$, & le petit axe $\frac{2l\sqrt{K}}{\sqrt{h-K}}$: dans le second, le terme $(K-h)yy$ sera zéro, & alors l'équation exprimera une parabole dont le paramétre sera $\frac{4Kl^2}{h^2}$: dans le troisiéme enfin, $(K-h)y^2$ sera positif, &

l'équation exprime alors une hyperbole dont le grand axe sera $\frac{hh}{K-h}$, & le petit $\frac{2l\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}}$.

Démonstration de ces trois Cas.

Fig. 5. *Premier Cas.* L'équation polaire de l'ellipse pour un de ses foyers, est $dx = \frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay-yy-bb}}$ (suivant l'art. 9.) lorsque a est le demi grand axe, & b le demi petit axe : lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2ay}{bb}-\frac{yy}{bb}-1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire dans le cas présent, c'est-à-dire, lorsque le terme $(K-h)yy$ est négatif, laquelle est alors

$$dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{-(h-K)yy+h^2y}{Kl^2}-1}},$$ on aura $\frac{2a}{bb} = \frac{h^2}{Kl^2}$, & $\frac{1}{bb} = \frac{h-K}{Kl^2}$, d'où l'on tirera $b = \frac{l\sqrt{K}}{\sqrt{h-K}}$, $a = \frac{hh}{2\times\overline{h-K}}$. C. Q. F. 1°. D.

Donc le corps partant du point P avec une vîtesse moindre que celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur PC, decrira une ellipse.

Fig. 11. *Second Cas.* L'équation polaire de la parabole pour son foyer, est $dx = \frac{c\,dy}{y\sqrt{cy-cc}}$, lorsque c est la distance du sommet au foyer ; en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{y}{c}-1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire qui est dans la supposition

position de ce second cas, $dx = \frac{-dy}{y\sqrt{\frac{n^2y}{l^2K} - 1}}$, on aura $\frac{1}{c}$ $= \frac{hh}{Kl^2}$, d'où on tire $c = \frac{Kl^2}{hh}$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

Ainsi le corps en partant du point P avec une vîtesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur PC, décrira une parabole.

Troisiéme Cas. L'équation polaire de l'hyperbole pour un de ses foyers est $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{2ay + yy - bb}}$, lorsque le demi grand axe est a, & le demi petit axe b: en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2ay}{bb} + \frac{y^2}{bb} - 1}}$, & la comparant avec l'équation générale de la trajectoire qui est dans le cas présent $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K-h)y^2 + h^2y}{Kl^2} - 1}}$, on aura $\frac{2a}{bb} = \frac{hh}{Kl^2}$, & $\frac{1}{bb} = \frac{K-h}{Kl^2}$, d'où l'on tirera $b = \frac{l\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}}$, & $a = \frac{hh}{2 \times \overline{K-h}}$. *C. Q. F.* 3°. *D.* Fig. 10.

Donc le corps partant du point P avec une vîtesse plus grande que celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur PC, décrira une hyperbole.

XXII.

SCHOLIE.

On voit par ces trois suppositions de $h >$, $=$ ou $< K$ qui sont les trois cas possibles, que lorsque la force agit en raison inverse du quarré des distances, les trajectoires ne peuvent être que des sections coniques, ayant le centre des forces dans un foyer, quelle que soit la force projectile.

XXIII.

PROPOSITION XIV. PROBLÊME IX.

Trouver la courbe que le corps décrira, en supposant $Y = ny$.

Fig. 12. On aura $\int Y dy = \int n y dy = \frac{n}{2} yy$; & l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y dy}{l^2 f^2} - 1}}$ deviendra $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - ny^4}{l^2 f^2} - 1}}$: pour chasser B je reprens l'équation $\frac{2B - 2\int Y dy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$ qui devient en ce cas $\frac{2B - nyy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$, & mettant l pour p, & h pour y dans cette équation, j'aurai $2B = f^2 + nhh$, & par conséquent $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(f^2 + nh^2)yy - ny^4}{l^2 f^2} - 1}}$; supposant ensuite, comme dans l'Art. 20. que K soit la hauteur d'où le corps devroit tomber lorsqu'il est poussé avec la force constante exercée à la distance h, on aura $f = \sqrt{2hnK}$, qui étant substituée dans cette équation, la changera en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh + hh)y^2 - y^4}{2l^2 hK} - 1}}$ qui est l'équation générale de toutes les courbes qui peuvent être décrites, lorsque la force centripéte agit en raison de la simple distance. *C. Q. F. T.*



XXIV.

PROPOSITION XV. THEORÉME VII.

Réduction de l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)y^2-y^4}{2l^2hK}-1}}$ *à l'équation de l'ellipse, ou maniere d'exprimer la force centripète dans l'ellipse, en prenant le centre de l'ellipse pour le centre des forces.*

L'équation polaire * de l'ellipse est pour le centre $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy-bb}\times\sqrt{aa-yy}}$: en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(aa+bb)yy-y^4}{aabb}-1}}$, & la comparant à l'équation de la trajectoire $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)yy-y^4}{2l^2hK}-1}}$, on aura $\frac{aa+bb}{aabb} = \frac{2Kh+hh}{2l^2hK}$ & $aabb = 2l^2hK$, d'où l'on tire $a =$

* Pour trouver cette équation soit l'ellipse ABD, je tire du centre C la ligne CM, j'abaisse MQ perpendiculaire sur l'axe AD, & du pôle C comme centre, je trace l'arc de cercle OP, & je fais les lignes $CO = 1$. $CQ = u$. $QM = z$. $CM = y$. $AC = a$. $CB = b$. $CF = c$. Ayant alors dans l'ellipse $z = \frac{b}{a}\sqrt{aa-uu}$, on trouvera $CM = \sqrt{\frac{a^2u^2+a^2b^2-b^2u^2}{aa}} = y$, & par conséquent $u = \frac{a}{c}\sqrt{yy-bb}$. $\frac{CQ}{CM}$ sinus de l'angle OCP que j'appelle s sera $\frac{a}{cy}\sqrt{y^2-b^2}$ qui donne $ds = \frac{ab^2dy}{cy^2\sqrt{yy-bb}}$, & $\sqrt{1-ss} = \frac{b}{cy}\sqrt{aa-yy}$: or $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}} = dx$, donc $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy-bb}\times\sqrt{aa-yy}}$. C. Q. F. T. Fig. 13.

$\sqrt{\frac{2Kh+hh}{2} + \sqrt{\frac{(2Kh+hh)^2}{2} - 2l^2hK}}$, & $b = \sqrt{\frac{2Kh+hh}{2} - \sqrt{\frac{(2Kh+hh)^2}{2} - 2l^2hK}}$. *C. Q. F. F.* Ainsi quelque soit la vîtesse projectile, la trajectoire ne pourra jamais être qu'une ellipse dans cette supposition de la force centripéte en raison directe de la distance au centre.

XXV.

SCHOLIE.

Si le corps dans cette hypothèse au lieu d'être attiré vers le centre *C* en étoit repoussé, en ce cas la lettre *n* qui marque l'intensité de la force seroit négative, ou, ce qui en est une suite, la lettre *K* qui exprime la hauteur d'où le corps auroit dû tomber vers *C* pour acquérir la vîtesse *f*, devroit être faite négative dans l'équation précédente $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)y^2 - y^4}{2l^2hK} - 1}}$, laquelle se changeroit par conséquent en celle-ci $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(hh-2Kh)y^2 - y^4}{-2l^2hK} - 1}}$, ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh-hh)y^2 + y^4}{2l^2hK} - 1}}$ & exprimeroit toujours une hyperbole quelle que fut la vîtesse projectile, & cette hyperbole auroit son centre de figure dans le centre des forces : car l'équation polaire de l'hyperbole pour son centre est * $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy+bb} \times \sqrt{yy-aa}}$, le demi grand axe étant a, & le demi petit axe b.

Fig. 14. * Voici comment on trouve cette équation. Soit l'hyperbole *CM*, je tire du centre *A* la ligne *AM*, j'abaisse *MQ* perpendiculaire sur l'axe *AC*, & du pôle *A* comme centre, je décris l'arc de cercle *OP*, & je fais les lignes $AO = 1$. $AQ = u$. $QM = z$. $AM = y$. $AC = a$. $AB = b$. $AF = c$. L'équation,

On

On peut donner à cette équation cette forme $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\left(\dfrac{bb-aa}{aabb}\right)yy + \dfrac{y^4}{a^2b^2} - 1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire dans la supposition présente, on aura $\dfrac{bb-aa}{aabb} = \dfrac{-hh+2Kh}{2l^2Kh}$ & $aabb = 2l^2Kh$; d'où l'on tire $b = \sqrt{-\dfrac{hh+2Kh}{2} + \sqrt{\dfrac{(hh-2Kh)^2}{2} + 2Kl^2h}}$ & $a = \sqrt{\dfrac{hh-2Kh}{2} + \sqrt{\dfrac{(hh-2Kh)^2}{2} + 2l^2Kh}}$: ainsi dans cette loi de force centripéte, en supposant que la force attractive vers le centre se change en force repulsive, le corps ne pourra jamais décrire qu'une hyperbole, quelle que soit la vîtesse projectile.

XXVI.

PROPOSITION XVI. THEORÊME VIII.

Dans toutes les ellipses, lorsque la force attractive tend au centre ; les tems périodiques sont égaux si les intensités des forces sont les mêmes.

On a vû dans l'Article 4. que quand les arcs sont parcourus en temps égal, les forces sont comme les fléches ; donc lorsque les fléches seront comme les distances, les temps dans lesquels

de l'hyperbole étant $uu - aa = \dfrac{aazz}{bb}$ j'en tire AM, ou $\sqrt{uu+zz} = \sqrt{\dfrac{a^2u^2 - a^2b^2 + b^2u^2}{a^2}}$, qui étant égalée à y, donne $u = \dfrac{a}{c}\sqrt{yy+bb}$; donc $\dfrac{AQ}{AM}$ sinus de l'angle BAP que j'appelle s sera $= \dfrac{a}{cy}\sqrt{yy+bb}$, ce qui donne $ds = \dfrac{ab^2dy}{cy^2\sqrt{yy+bb}}$ & $\sqrt{1-ss} = \dfrac{b}{cy}\sqrt{yy-aa}$, ou $\dfrac{ds}{\sqrt{1-ss}} = dx$, donc $dx = \dfrac{abdy}{y\sqrt{yy+bb}\,.\,\sqrt{yy-aa}}$. *C. Q. F. T.*

elles ſont parcourues ſeront égaux. La queſtion eſt donc réduite à prouver que ſi dans chaque ellipſe on prend deux ſecteurs infiniment petits qui ſoient chacun en même raiſon avec l'aire entiere de l'ellipſe, les fléches dans chacun de ces ſecteurs ſeront proportionnelles aux diſtances.

Premier Cas. Il eſt aiſé de voir la vérité de cette propoſition dans les ellipſes ſemblables, car toutes les lignes ſont proportionnelles dans ces courbes.

Fig. 15. *Second Cas.* Quant aux ellipſes qui ne feroient pas ſemblables, pour les mieux conſidérer on commencera par ſuppoſer qu'elles ayent un axe de commun, tandis que l'autre varieroit dans une raiſon quelconque; or on ſçait qu'alors toutes les ordonnées de ces ellipſes ſeront proportionnelles à l'axe qu'on rend variable; donc les ſecteurs $CM\mu$, $CM'\mu'$ (CMM' eſt élevé perpendiculairement à CP) qui ſont entr'eux comme les ordonnées μP, $\mu' P$ ſeront auſſi comme les demi axes CM, CM', & ſeront par conſéquent des parties ſemblables de leurs ellipſes totales. Mais dans ces ſecteurs les fléches $m\mu$, $m'\mu'$ ſont viſiblement comme les diſtances $C\mu$, $C\mu'$; donc les ellipſes AMB, $AM'B$ ſeront parcourues dans le même temps, puiſqu'on avoit réduit la queſtion à trouver deux ſecteurs proportionnels à ces ellipſes, dans leſquels les fléches fuſſent comme les diſtances. Mais ſi deux ellipſes qui ont un axe de commun ſont parcourues en temps égaux, & que deux ellipſes qui n'ont point d'axe commun, mais qui ſoient ſemblables, ſoient auſſi parcourues dans le même temps, il eſt clair que toutes les ellipſes imaginables le ſeront auſſi, puiſqu'on n'aura qu'à faire ſur l'axe de l'une une ellipſe ſemblable à l'autre. *C. Q. F. D.*



XXVII.

PROPOSITION XVII. PROBLÉME X.

Trouver la courbe que le corps décrira, en suppoſant $Y = \frac{n}{y^3}$.

On aura dans cette ſuppoſition $\int Y\,dy = \frac{\int n\,dy}{y^3}$, & en intégrant $\int Y\,dy = \frac{-n}{2yy}$, donc alors l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y\,dy}{l^2 f^2} - 1}}$ deviendra en ſubſtituant pour $\int Y\,dy$ ſa valeur préſente $\frac{-n}{2yy}$, $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy+n}{l^2f^2} - 1}}$; on a trouvé (Art. 0.) $\frac{2B - 2\int Y\,dy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$ qui devient dans la ſuppoſition préſente $\frac{2B + \frac{n}{yy}}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, d'où je tire (en mettant l pour p & h pour f) $2B = f^2 - \frac{n}{hh}$, & mettant cette valeur de $2B$ dans l'équation précédente, elle devient $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{\left(f^2 - \frac{n}{hh}\right)y^2 + n}{l^2f^2} - 1}}$: mais dans le cas préſent la force φ ſuppoſée agir uniformément ſur le corps pour lui donner la viteſſe f, en tombant de la hauteur K eſt $\frac{n}{h^3}$; donc en employant le même Theoréme dont on a fait uſage (Art. 21.) on aura $f = \sqrt{\frac{2nK}{h^3}}$, & mettant pour f^2 ſa valeur dans l'équation

précédente, elle sera $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{\left(\frac{2nK}{h^3} - \frac{n}{h^2}\right)y^2 + n}{\frac{2nKl^2}{h^3}} - 1}}$

ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{l^2} - \frac{h}{2Kl^2}\right)yy + \frac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$, équation générale de toutes les trajectoires qui peuvent être décrites, lorsque la force agit en raison inverse du cube des distances.

XXVIII.

PROPOSITION XVIII. THEORÉME IX.

Cas où l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{l^2} - \frac{h}{2Kl^2}\right)y^2 + \frac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ *se réduit à celle de la logarithmique spirale.*

Si dans dans cette équation on suppose $\frac{1}{l^2} = \frac{h}{2Kl^2}$, le premier terme du signe radical sera zéro, & alors l'équation se réduira à $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ qui donne ydx à dy dans la raison constante de 1 à $\sqrt{\frac{h^3}{2Kl^2} - 1}$, ce qui est la propriété de la spirale logarithmique d'où l'on tire son équation : car tous les rayons de cette courbe faisant un angle constant avec les arcs qui les terminent, ydx est toujours à dy en raison constante ; donc dans cette hypothèse, c'est-à-dire lorsque la vîtesse projectile sera telle que $1 = \frac{2K}{h}$, la trajectoire sera toujours une spirale logarithmique.

XXIX.

XXIX.

PROPOSITION XX. THEORÊME X.

Réduction de l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{l^2} - \frac{h}{2Kl^2}\right)y^2 + \frac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ *dans le cas où l'on suppose que le corps part du point* P *perpendiculairement à la ligne* CP, *& dans lequel par conséquent* $l = h$.

Cette équation deviendra donc alors $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2Kh}\right)y^2 + \frac{h}{2K} - 1}}$, qu'on peut écrire ainsi $dx = \frac{dy}{y\sqrt{-\left(\frac{h}{2K} - 1\right)\frac{y^2}{hh} + \frac{h}{2K} - 1}}$, d'où l'on tire $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$ ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{h}{2K} - 1} \times \sqrt{1 - \frac{yy}{hh}}}$, selon que $\frac{h}{2K}$ sera $<$ ou $>$ que 1. Le premier de ces deux cas, celui de $\frac{h}{2K} < 1$ se construit par l'arc de cercle, & le second celui de $\frac{h}{2K} > 1$ par le secteur hyperbolique.

Premier Cas. Ayant tracé le cercle *AVP* dont le rayon *CP* $= h$, tirant une tangente *TV* à l'un de ses points quelconques *V*, & prolongeant l'axe *CP* jusqu'en *T*, où il rencontre la tangente *TV*, on aura la trajectoire cherchée en prenant toutes les *CM* = *CT*, & faisant les angles *MCT* aux angles *PCV* comme $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}$ est à 1. Fig. 16.

Pour le prouver faisant les lignes $CQ = u$. $QV = z$. $CP = h$. $CT = \frac{hh}{u} = CM = y$, on a pour la valeur de l'angle $VCP \int \frac{du}{\sqrt{hh - uu}}$, mais puisqu'on $\frac{hh}{u} = y$, on aura $du = \frac{-hhdy}{yy}$ & $\sqrt{hh - uu} = \frac{h\sqrt{yy - hh}}{y}$, & $\frac{du}{\sqrt{hh - uu}} = \frac{hdy}{y\sqrt{yy - hh}}$; donc puisque l'angle PCM est à l'angle PCV comme $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}$ est à 1, on aura $dx : \frac{hdy}{y\sqrt{yy - hh}} :: \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}} : 1$, d'où l'on tire $dx = \frac{hdy \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}}{y\sqrt{yy - hh}}$ ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, qui est l'équation qu'on se proposoit de construire.

Fig. 17. *Second Cas.* Pour avoir maintenant la courbe que le corps décrit, lorsque $\frac{h}{2K} > 1$, on trouve l'hyperbole équilatere PV, dont $CP = h$ soit le demi axe transversal : on menera une tangente quelconque VT à l'un de ses points quelconques V ainsi que le rayon CV, & la trajectoire cherchée se construira en prenant les $CM = CT$, & en faisant les angles MCT aux rapports $\frac{CPV}{CP^2} :: \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2K} - 1}} : 1$.

Pour les trouver je fais les lignes $CQ = u$. $QV = z$. $CP = h$. $CT = \frac{hh}{u} = CM = y$. On aura le secteur $CPV =$

$\frac{1}{2}\int u\,dz - \frac{1}{2}\int z\,du$; mais $z = \sqrt{uu - hh}$ & $dz = \frac{u\,du}{\sqrt{uu - hh}}$, donc le secteur $VCP = \frac{1}{2}\int \frac{uu\,du}{\sqrt{uu - hh}} - \frac{1}{2}\int du\sqrt{uu - hh} = \frac{1}{2}\int \frac{hh\,du}{\sqrt{uu - hh}}$; mais puisque $\frac{hh}{u} = y$, on aura $\sqrt{uu - hh} = \frac{h}{y}\sqrt{hh - yy}$ & $du = \frac{-hh\,dy}{yy}$, & par conséquent le secteur $\frac{CPV}{CP^2} = -\int \frac{h\,dy}{y\sqrt{hh - yy}}$, d'où l'on tirera $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{h}{2K} - 1} \times \sqrt{1 - \frac{yy}{hh}}}$ qui est la courbe qu'on se proposoit à construire. *C. Q. F. D.*

X X X.

COROLLAIRE.

Au reste il est aisé de voir que la construction donnée dans ces deux cas, est la même que celle de M. *Newton*, Corol. 3. Prop. 41. qu'on trouve à la page 136. de cet Ouvrage, Tom. I.

X X X I.

SCHOLIE.

Si on supposoit que la force fut centrifuge au lieu d'être centripéte, la lettre *n* qui désigne la quantité de la force devroit être négative, & par conséquent la lettre *K* le seroit aussi, ce qui donneroit à l'équation précédente $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, la forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 + \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, la-

quelle ne peut être conſtruite, comme il eſt aiſé de le voir, que par l'opération du cas premier, où l'on a vû par la nature de la courbe, ainſi que par celle du Problême, que le corps en partant du point P s'éloignera de plus en plus du centre.

XXXII.

PROPOSITION XXI. PROBLÊME XI.

Trouver la trajectoire que le corps décrira en ſuppoſant $Y = \frac{n}{yy} + \frac{mn}{y^3}$.

On aura dans ce cas $\int Y dy = -\frac{n}{y} - \frac{mn}{2yy}$ en intégrant : alors l'équation générale trouvée (Article 17.) $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Ydy}{l^2f^2} - 1}}$ ſe changera en $dy = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy + 2ny + nm}{l^2f^2} - 1}}$. Mais on a trouvé dans ce même article, $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, donc on aura $2B + \frac{2n}{h} + \frac{nm}{hh} = f^2$ (en mettant h pour y & l pour p) d'où on tire $2B = f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}$; donc $dx = \frac{lfdy}{y\sqrt{\left(f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}\right)yy + 2ny + nm - l^2f^2}}$.

Pour eſſayer de réduire cette équation aux équations polaires des ſections coniques, je lui donne cette forme $dx = \frac{\frac{lfdy}{\sqrt{l^2f^2 - mn}}}{y\sqrt{\frac{\left(f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}\right)yy}{l^2f^2 - nm} + \frac{2ny}{l^2f^2 - nm} - 1}}$, d'où l'on

tire

tire $dx = \dfrac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{nm}{l^2 f^2}}}}{y\sqrt{\dfrac{f^2 - \dfrac{2n}{h} - \dfrac{mn}{hh}}{l^2 f^2 - mn} yy + \dfrac{2ny}{l^2 f^2 - mn} - 1}}$.

Mais on a vû (note de l'Art. 20.) que $f^2 = 2\phi K$, or dans la préſente ſuppoſition Y ou $\phi = \frac{n}{hh} + \frac{mn}{h^3}$ (car on a ſuppoſé y ou la diſtance $= h$) on aura donc $\phi = \frac{n}{h^3}(m + h)$, & par conſéquent $f^2 = 2\frac{nK}{h^3}(h + m)$. Subſtituant à préſent cette valeur de f^2 dans la derniere équation $dx = \dfrac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{nm}{l^2 f^2}}}}{y\sqrt{\dfrac{f^2 - \dfrac{2n}{h} - \dfrac{nm}{hh}}{l^2 f^2 - mn} yy + \dfrac{2ny}{l^2 f^2 - mn} - 1}}$, on aura $dx =$

$$\dfrac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{mh^3}{2l^2 K(h+m)}}}}{y\sqrt{\dfrac{2K(h+m) - 2h^2 - mh}{2Kl^2(h+m) - mh^3} y^2 + \dfrac{2h^3 y}{2Kl^2(m+h) - mh^3} - 1}};$$

or on voit par cette équation, en la comparant avec l'équation polaire des ſections coniques, qu'elle peut leur être comparée exactement, à l'exception du coëfficient de dy, lequel apprend ſeulement que cette équation exprime une ſection conique dont on augmente ou diminue les angles en raiſon conſtante, & on conſtruira ainſi cette trajectoire.

Soit décrite la ſection conique AQP exprimée par l'équation $dx =$ Fig. 18, & 19.

$$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{2K(h+m)-2h^2-mh}{2Kl^2(h+m)-mh^3}yy+\frac{2h^3y}{2Kl^2(m+h)-mh^3}-1}},$$

ſoient pris enſuite les angles PCM aux angles PCQ dans la raiſon de 1 à $\sqrt{\frac{mh^3}{2Kl^2(h+m)}}$, & la courbe qui paſſera par tous les points M, ſera la trajectoire cherchée. *C. Q. F. T.*

XXXIII.

SCHOLIE.

Fig 18. & 19. On verra aiſément que ſi l'on ſuppoſe que pendant que le corps marche dans l'ellipſe AQP de P en Q, cette courbe elle-même avance d'un mouvement angulaire qui ſe faſſe autour du centre C dans le même ſens, & que le mouvement angulaire ſoit de la quantité $PCH = QCM$ le corps étant arrivé au point Q de l'ellipſe ſe trouvera au point M par le mouvement de l'ellipſe même, donc la courbe qui paſſera par tous les points M ſera la courbe cherchée.

Cette conſtruction s'exécutera donc en ſuppoſant ſimplement un mouvement angulaire dans les apſides de cette ſection conique, qui ſoit de la quantité que donnera le coëfficient de dy, & qui ſe fera dans le même ſens que le mouvement du corps ou en ſens contraire, c'eſt-à-dire du côté de Q ou du côté oppoſé, ſelon que l'angle $PCM >$ ou $< PCQ$, c'eſt-à-dire, ſelon que la quantité qui eſt ſous le ſigne du coëfficient de dy, ſera $>$ ou $<$ 1.

Remarque. On a commencé par examiner dans le Problême précédent, ce qui arrive dans le cas où Y exprimant la force en raiſon inverſe du quarré des diſtances, on y ajoute une force inverſement proportionnelle au cube des diſtances exprimée par $\frac{mn}{y^3}$, parce que le cas de la force en raiſon inverſe du quarré des diſtances étant celui qui a lieu dans le Syſtême du Monde, eſt le

plus important à connoître, & on a supposé de plus, dans cet Article précédent, que le corps partoit du point donné avec une vîtesse & une direction données. Examinons à présent ce qui arriveroit dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur, par la même addition de force.

XXXIV.

PROPOSITION XXI. PROBLEME XII.

On demande les trajectoires décrites dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur, en ajoutant à la force quelconque la force $\frac{m}{y^3}$. Fig. 12.

Dans ce cas Y où la force totale seroit $Y + \frac{m}{y^3}$, donc on auroit alors au lieu de $\int Y dy$ la quantité $\int Y dy + \int \frac{m\,dy}{y^3}$, c'est-à-dire $\int Y dy - \frac{m}{2yy}$. Prenant à présent l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2By^2 - 2y^2\int Y dy}{l^2 f^2} - 1}}$ de toutes les trajectoires, & y substituant pour $\int Y dy$ sa valeur dans la supposition présente, on aura alors l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y dy + m}{l'^2 f'^2} - 1}}$, dans laquelle je substitue au lieu des constantes B, l, f de la solution précédente, d'autres constantes B', l', f', afin de n'être pas restraint à faire partir le corps avec la même vîtesse & la même direction, & de pouvoir déterminer au contraire la relation des nouvelles constantes aux premieres, la plus propre à comparer les courbes que l'on a dans ces deux hypothèses.

L'équation précédente peut avoir cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2B'}{l'^2 f'^2 - m} yy - \frac{2yy}{l'^2 f'^2 - m}\int Y dy - 1}}$, & on aura

alors $\frac{2B'}{l'^2 f'^2 - m} = \frac{2B}{l^2 f^2}$ & $\frac{1}{l'^2 f'^2 - m} = \frac{1}{l^2 f^2}$, ou $l'^2 f'^2 - m = l^2 f^2$, d'où l'on voit qu'en donnant au corps au point de départ une vîtesse & une direction convenables, on décrira cette trajectoire en supposant un mouvement d'apsides dans la courbe que l'équation de l'art. 17. a donnée : il ne s'agira donc plus que de déterminer les l & f, c'est à-dire de donner au corps en partant de P une certaine direction, car alors on connoîtra B; reprenant donc la valeur générale de B trouvée $\frac{2B - 2\int Y dy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$, elle deviendra dans le cas présent $\frac{2B' - \int Y dy + \frac{m}{2yy}}{l'^2 f'^2} = \frac{1}{p^2}$, & mettant l' pour p & h pour y, comme dans l'Art. 20. elle deviendra $2B' - \int Y dy + \frac{m}{2hh} = f'^2$, & supposant que $\int Y dy = H$ lorsque $y = h$, on aura $2B' = f'^2 - \frac{2hh}{m} + H$: supposant en même tems que l'on ait fait dans l'Article 20. $\int Y dy = H$ lorsque y a la même valeur h, la valeur de B dans cette supposition deviendra $2B = f^2 + H$. Mettant donc dans l'équation ci-dessus $\frac{2B'}{l'^2 f'^2 - m} = \frac{2B}{l^2 f^2}$ pour B', & pour B les deux valeurs qu'on vient de trouver, on aura $\frac{f'^2 - \frac{m}{2hh} + H}{l'^2 f'^2 - m} = \frac{f^2 + H}{l^2 f^2}$. Ayant ainsi les deux équations $\frac{f'^2 - \frac{m}{2hh} + H}{l'^2 f'^2 - m} = \frac{f^2 + H}{l^2 f^2}$, & $l'^2 f'^2 - m = l^2 f^2$ lesquelles ne renferment plus que les deux inconnues l' & f', on en tirera les valeurs de ces deux quantités, lesquelles seront $f' = \sqrt{f^2 + \frac{m}{2hh}}$ & $l' =$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{(l^2 f^2 + m) 2 h^2}{h^2 f^2 + m}}$; mais l & f donnent la direction & la vîtesse que doit avoir le corps au point P afin qu'il décrive la même trajectoire que celle que l'équation de l'Art. 17. a donnée ; donc en donnant à cette courbe le mouvement d'apsides déterminé par le coëfficient de dy, elle deviendra celle qui résulte de la force $Y + \frac{m}{y^3}$ supposée ici. *C. Q. F. T.*

XXXV.

SCHOLIE.

Cette Proposition contient la démonstration des Propositions 44 & 45 de la section 9 du premier Livre qui traite du mouvement des apsides. Après avoir vû dans les Propositions précédentes le temps & la vîtesse des corps dans les courbes que différentes forces centripétes leur feroient décrire, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici le temps & la vîtesse des corps à différentes distances du centre, lorsqu'ils y tombent en ligne droite, ce qui arrive lorsqu'on ne leur donne aucune impulsion à leur point de départ, ou lorsque celle qu'on leur donne tend au centre.

XXXVI.

PROPOSITION XXII. PROBLÊME XIII.

On demande le temps & la vîtesse d'un corps qui tombe vers un centre vers lequel il est attiré par une force quelconque, ce corps étant placé à une distance quelconque de ce centre.

Faisant d'abord $AC = a$. $CP = y$. $AP = a - y$. $Pp = dy$, Fig. 10.
la vîtesse acquise de A en $P = u$, l'instant employé à parcourir Pp sera $-\frac{dy}{u}$, & multipliant cet instant par la force Y on aura $du = -\frac{Ydy}{u}$, ou $udu = -Ydy$ dont l'intégrale est

$A - \int Y dy = \frac{1}{2} uu$. Quant à la conſtante A elle ſe détermine par cette condition, que ſi $y = a$, u ſoit $= o$, c'eſt-à-dire, qu'au point de départ le corps n'ait aucune vîteſſe (s'il en avoit une vers le centre, on feroit A tel que u feroit égal à cette vîteſſe lorſqu'on feroit $y = a$) : de $u^2 = 2A - 2\int Y dy$, on tire $u = \sqrt{2A - 2\int Y dy}$; donc $dt = \frac{-dy}{u}$, devient $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$. *C.Q.F.T.*

XXXVII.

COROLLAIRE I.

Suppoſant à préſent le cas où $Y = \frac{n}{y^2}$, on aura $-\int Y dy = \int \frac{n dy}{yy} = -\frac{n}{y}$, mettant donc dans les équations précédentes $-\frac{n}{y}$ pour $-\int Y dy$, on aura $2A + \frac{2n}{y} = u^2$; or quand $y = a$, $u = o$ (*hyp*), donc on aura dans cette ſuppoſition $2A + \frac{2n}{a} = o$; donc alors $A = -\frac{n}{a}$, & mettant à la place de A cette valeur dans l'équation $2A - 2\int Y dy = u^2$, on aura $-\frac{2n}{a} + \frac{2n}{y} = u^2$ qui donne $u = \sqrt{\frac{2n}{y} - \frac{2n}{a}}$ ou $\sqrt{2n} \times \sqrt{\frac{a-y}{ay}}$, ou $\sqrt{\frac{2n}{a}} \times \sqrt{\frac{a-y}{y}}$; $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$ deviendra par les mêmes ſubſtitutions $dt = \frac{dy}{\sqrt{\frac{2n}{a}} \times \sqrt{\frac{a-y}{y}}}$ ou $dt = \frac{-dy\sqrt{y} \times \sqrt{\frac{a}{2n}}}{\sqrt{a-y}}$, & le temps total par AP ſera

l'intégrale de cette quantité, & pourra être déterminé par cette construction.

Ayant décrit sur la ligne AC le demi cercle $AMVC$, le temps de la chute par AP sera proportionnel au produit du secteur ACM par $\sqrt{AC}$. Fig. 11.

La raison de cette construction est aisée à trouver. Faisant les lignes $AC = a$. $PM = \sqrt{ay - yy}$. $CM = \sqrt{ay}$. $mo = \frac{-ady}{2\sqrt{aa - ay}}$. $AM = \sqrt{aa - ay}$. $CP = y$. $AP = a - y$. pour s'accorder avec les dénominations précédentes. On voit d'abord que le petit secteur Mcm différentielle du secteur ACM a pour valeur le produit de CM par mo différentielle de AM, c'est-à-dire $\sqrt{ay} \times \frac{-ady}{2\sqrt{aa - ay}}$; donc le secteur $ACM = \frac{-a\int dy\sqrt{y}}{4\sqrt{a - y}}$, qui étant multiplié par $\sqrt{\frac{8}{an}}$ deviendra l'expression précédente du temps par Pp, ou $dt = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} \times \sqrt{\frac{a}{2n}}$; donc le temps par AP sera égal au secteur $\frac{ACM}{\sqrt{AC}} \times \sqrt{\frac{8}{n}}$ quand la force est comme le quarré.

XXXVIII.

COROLLAIRE II.

Et le temps total de la chute par AC sera $\frac{APCVM}{\sqrt{AC}} \times \sqrt{\frac{8}{n}}$, ou $\frac{1}{4}\, c \times AC^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{n}}$, en mettant à la place du demi cercle $APCVM$ sa valeur $\frac{1}{8}\, c.\, AC^2$, on voit par cette expression que dans la loi de pesanteur en raison renversée du quarré de la distance, le temps des chutes depuis un point quel-

conque juſqu'au centre des forces, eſt comme la racine quarrée du cube de l'eſpace parcouru en tombant. On devoit bien s'atten dre à l'accord de cette Prop. avec celle qui eſt entre le temps périodique des planetes & leur moyenne diſtance, puiſqu'on peut regarder un corps qui tombe vers un centre, comme s'il décrivoit une ellipſe infiniment étroite dont le grand axe ſeroit hauteur de la chute, & qu'en ce cas la chute ou l'eſpace *A C* eſt le double de la moyenne diſtance ; c'eſt ainſi que M. *Newton* a conſidéré les chutes rectilignes des corps (Prop. 36.)

Si on vouloit comparer le temps de la révolution d'une planete avec celui qu'elle mettroit à tomber dans le Soleil, rien ne ſeroit plus facile par ce qu'on vient de donner : car le temps de la chute par le rayon pouvant être regardé comme la demie révolution dans une planete qui auroit ce rayon pour grand axe, il n'eſt queſtion que de prendre la moitié de la partie $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ du temps de la révolution même de la planete pour avoir le temps de ſa chute, en ſuppoſant qu'elle commençât à tomber du lieu où elle eſt dans ſa moyenne diſtance.

Si elle tomboit d'un autre lieu, le temps total de ſa chute ſeroit à ce qu'il ſeroit en partant de la moyenne diſtance, en raiſon ſeſquiplée de la raiſon qui eſt entre le rayon par lequel on la ſuppoſeroit tomber & la moyenne diſtance. Si on veut comparer le temps qu'une planete mettroit à tomber vers le Soleil avec celui qu'un ſatellite mettroit à tomber vers la planete qui lui ſert de centre, il faudra prendre les rapports qu'auroient les mêmes temps, ſi on regardoit le ſatellite comme une planete principale qui ſeroit à la même diſtance du Soleil que le ſatellite de ſa planete principale, & diviſer la raiſon de ces temps par celle qui eſt entre les racines quarrées des maſſes centrales, c'eſt-à-dire de la maſſe ou planete qui attire le ſatellite, à la maſſe du Soleil.

XXXIX.

XXXIX.

COROLLAIRE III.

Si au lieu d'avoir ſuppoſé $Y = \frac{n}{yy}$ on l'avoit ſuppoſé $= ny$, on auroit eu $\int Y dy = \int ny\,dy$, & en intégrant $\int Y dy = \frac{nyy}{2}$, mettant enſuite cette valeur dans l'équation $2A - 2\int Y dy = u^2$, & ſuppoſant de même que quand $y = a$, $u = o$, on aura $2A = naa$, & on aura en ſubſtituant $u = \sqrt{naa - nyy}$, ou $\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}$. Et $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$ devient en ce cas $dt = \frac{-dy}{\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}}$, d'où l'on voit qu'en faiſant ſur AC comme rayon un quart de cercle, & élevant au point P la perpendiculaire PM, le temps employé à parcourir la droite AP aura pour valeur l'arc $ACM \times \frac{1}{\sqrt{n}}$, car cet arc eſt $\frac{-dy}{\sqrt{aa - yy}}$. Fig. 22.

Si on ſuppoſe dans cette équation $dx = \frac{-dy}{\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}}$ $y = a$, on aura alors pour l'expreſſion du temps par AC le produit de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ par le nombre qui exprime l'angle droit, ou ce qui revient au même par le rapport du quart de cercle au rayon.

Ce qui fournit cette remarque ſinguliere que le corps central étant le même dans cette hypothèſe de peſanteur, de quelque diſtance que ce corps parte, il arrivera dans le même temps au point C, puiſque la hauteur n'entre pas dans l'expreſſion du temps.

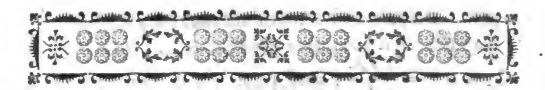


X L.

SCHOLIE.

Il en eſt donc des chutes rectilignes comme des mouvemens dans les orbes elliptiques, & la hauteur totale dans le premier cas, répond à l'axe tranſverſal dans l'autre, ce qu'il eſt aiſé de voir en conſidérant la hauteur *A C* comme la derniere ellipſe qu'on peut décrire ſur elle, & c'eſt ainſi que M. *Newton* l'a conſidérée dans la Section 7[e]. de ſon premier Livre des Principes.





SECTION II.

DE L'ATTRACTION DES CORPS en ayant égard à leurs figures.

PREMIERE PARTIE.

De l'attraction des Corps sphériques.

I.

PROPOSITION I. PROBLÊME I.

TRouver l'attraction de la surface sphérique dont le diamétre seroit A B *sur un corpuscule* P *placé sur le prolongement de ce diamétre, en supposant que toutes les parties de cette surface sphérique attirent comme une puissance quelconque* n *de la distance.*

On imaginera la surface sphérique *A C B* composée d'une infinité de petits cones tronqués produits par la révolution des élémens *I H Q q* autour de l'axe *A B*, & on commencera par chercher l'attraction de toutes les petites zones ou surfaces coniques *H I*. Fig. 1.

Ayant donc fait les lignes $PI = z$. $PS = f$. $AS = g$. $SE = u$. je commence par chercher la valeur du cosinus de l'angle IPQ pour le rayon 1. elle est $\frac{PE}{PS} = \frac{z^2 + f^2 - g^2}{2zf}$, & le sinus du même angle pour le rayon PI est $PQ = \frac{z^2 + f^2 - g^2}{2f}$, donc $dPQ = Qq = \frac{z\,dz}{f}$.

La valeur de la petite zone sphérique HI est $HI \times IQ$, ou $Qq \times AS = \frac{gzdz}{f}$; donc l'expression de l'attraction de la petite zone HI sur le corpuscule P, laquelle est en général $\frac{c}{r}\left(IH \times IQ \times IP^{n} \times Cos.\, IPQ\right)$ aura pour valeur $\frac{c}{r}\left(\frac{gzdz \times z^{n} \times \overline{zz+ff-gg}}{2zff}\right)$ qui se réduit à $\frac{c}{r}\left(\frac{gz^{n+2}dz + g(f^{2}-g^{2})z^{n}dz}{2ff}\right)$ dont l'intégrale est $\frac{c}{r}\left(\frac{gz^{n+3}}{2(n+3)ff} + \frac{g(ff-gg)z^{n+1}}{2(n+1)ff}\right)$: pour la completter je fais ensorte qu'elle s'évanouisse lorsque z ou PI devient $IA = f - g$. J'ai alors $\frac{cg}{2rf^{2}}\left(\frac{1}{n+3}\left(z^{n+3} - \overline{f-g}^{\,n+3}\right) + \frac{f^{2}-g^{2}}{n+1}\left(z^{n+1} - \overline{f-g}^{\,n+1}\right)\right)$ qui est l'attraction de la zone AI. je fais ensuite PI ou $z = f + g$, & il vient par ce moyen $\frac{2rf^{2}}{cg}\left(\frac{1}{n+3}\left(\overline{f+g}^{\,n+3} - \overline{f-g}^{\,n+3}\right) + \frac{f^{2}-g^{2}}{n+1}\left(\overline{f+g}^{\,n+1} - \overline{f-g}^{\,n+1}\right)\right)$ pour l'attraction de la surface sphérique totale.

II.

PROPOSITION II. PROBLEME II.

Trouver l'attraction de la sphere solide entiere ACBD *sur le corpuscule* P *placé dans le prolongement de son axe.*

Fig. 2. Je fais comme dans la Proposition précédente les lignes $PI = z$. $PS = f$. $AS = g$. Puisqu'on vient de voir dans cette Proposition, que la surface sphérique ACB attire le corpuscule P avec une

une force exprimée par $\frac{cg}{2rff}\left(\frac{1}{n+3}\left(\overline{f+g}^{n+3}-\overline{f-g}^{n+3}\right)\right.$ $\left.+\frac{f^2-g^2}{n+1}\left(\overline{f+g}^{n+1}-\overline{f-g}^{n+1}\right)\right)$ il eſt clair qu'en multipliant cette expreſſion par la petite épaiſſeur $Aa = dg$, on aura l'expreſſion de l'attraction que le petit orbe *abcd ABCD* exerce ſur le même corpuſcule *P*, & en intégrant, on aura l'attraction cherchée de la ſphére ſolide. *ABCD. C. Q. F. T.*

I I I.

PROPOSITION III. PROBLÊME III.

Trouver l'attraction de la ſurface ſphérique entiere ACB *ſur le corpuſcule P, en ſuppoſant que toutes ſes parties l'attirent par une force qui agiſſe en raiſon inverſe du quarré de la diſtance.*

On aura dans ce cas $n = -2$; reprenant donc l'expreſſion générale de l'attraction de cette ſurface ſphérique laquelle a été trouvée dans l'Article premier, & mettant pour n ſa valeur -2 dans la préſente ſuppoſition, on aura $\frac{cg}{2rff}\left(2g - \overline{ff-gg}\right.$ $\left.\times\frac{-2g}{ff-gg}\right)$ ou en réduiſant $\frac{cg}{2rf^2}\times 4g = \frac{2cg^2}{rff}$, qui exprime l'attraction de la ſurface ſphérique lorſque $n = -2$. *C. Q. F. T.* Fig. 1.

I V.

COROLLAIRE I.

Pour avoir l'attraction de l'orbe *abcdABCD* dans cette hypothèſe, il ſuffira de multiplier cette expreſſion $\frac{2cg^2}{rff}$ par $dg = Aa$, & en intégrant cette expreſſion de l'attraction du petit orbe, on aura $\frac{2cg^3}{3rff}$ pour l'expreſſion de l'attraction de la ſphére ſolide entiere *ABCD*, dans cette même hypothèſe de Fig. 2.

$n = -2$ & comme $\frac{2cg^3}{3r}$ eſt l'expreſſion de la ſolidité de la ſphére, on voit que dans cette hypothèſe l'attraction eſt comme la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance de ſon centre au corpuſcule attiré.

V.

COROLLAIRE II.

Dans cette hypothèſe de l'attraction réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, deux ſphéres s'attirent de même que ſi leurs maſſes étoient réunies à leur centre.

Fig. 3. Pour le prouver, ſuppoſons d'abord qu'au centre *A* il y ait un corpuſcule de même maſſe que la ſphére *A* elle-même, on a vu (Article précédent) que la ſphére *B* exercera ſur ce corpuſcule *A* la même attraction que ſi elle étoit elle-même toute réunie à ſon centre *B*; mais on doit voir auſſi, par la même raiſon, qu'elle ſera attirée par le corpuſcule *A* de la même maniere, ſoit qu'elle ſoit toute réunie à ſon centre *B*, ſoit qu'elle ait conſervée ſa forme réelle.

De plus, (même Article) la ſphére entiere *A* attire toutes les particules *M* de la ſphére *B* de la même maniere, que ſi elle étoit toute réunie à ſon centre *A*; donc il eſt indifférent pour l'attraction de deux ſphéres l'une vers l'autre dans l'hypothèſe de la raiſon inverſe des quarrés des diſtances, qu'elles gardent leur forme ou qu'elles ſoient ſuppoſées réunies à leur centre, pourvû qu'elles conſervent la même maſſe.

V I.

SCHOLIE.

On voit par l'expreſſion de l'attraction de la ſphére ſolide totale, que dans l'hypothèſe en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, il en eſt des ſphéres entieres comme de leurs plus petites parties, & qu'elles attirent de même que ces parties en raiſon de la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance.

VII.

PROPOSITION IV. PROBLÊME IV.

Trouver l'attraction de la surface sphérique entiere ABCD *sur le corpuscule* P, *en supposant que toutes les parties de la sphère attirent ce corpuscule par une force qui agisse en raison de la simple distance.*

On aura dans ce cas $n = 1$, reprenant donc l'expression trouvée (Art. 1.) & en y mettant pour n sa valeur 1 dans l'hypothèse présente, on aura $\frac{cg}{2rff}\left(\frac{1}{4}(8f^3g + 8fg^3) + \frac{f^2 - g^2}{2}(4fg)\right)$ qui se réduit à $\frac{cg}{2rf^2} \times 4f^3g = \frac{2cg^2f}{r}$, valeur de l'attraction de la surface sphérique ACB lorsque $n = 1$.

VIII.

COROLLAIRE I.

Pour avoir l'attraction de l'orbe $abcd\ ABCD$ dans cette hypothèse, il faut multiplier comme dans l'Art. 4. l'expression $\frac{2cfg^2}{r}$ par dg, & l'expression de l'attraction de cet orbe sera $\frac{2cfg^2dg}{r}$, & en intégrant on aura $\frac{2cg^3f}{3r}$ qui exprime l'attraction de la sphère solide entiere dans cette hypothèse.

IX.

COROLLAIRE II.

Et comme cette expression n'est autre chose que le produit de la masse par la distance, l'on voit que dans l'hypothèse de la simple distance comme dans celle de la raison inverse du quarré de la distance, la sphère totale attire suivant la même loi que les particules qui la composent.

X.

COROLLAIRE III.

Dans cette même loi de l'attraction proportionnelle à la distance, les corps de figure quelconque ont les mêmes propriétés que les sphéres, d'attirer suivant leur force totale, suivant la même loi que leurs particules.

Fig. 4. Pour la démontrer, soit tiré par *C* où l'on suppose le corpuscule attiré, une droite *CBP* qui passe par le centre de gravité du corps attirant *X*, & soit décomposée l'attraction de chaque particule *M* dans le sens de cette ligne *CP*, il est clair que l'attraction de la particule *M* étant comme *CM*, la partie, suivant *CBP*, sera *CP*; donc le produit de toutes les particules *M* du solide proposé par les distances *CP* sont l'attraction totale : mais il est clair par les principes de la Statique, que la somme de ces produits est égale au produit de la masse totale par la distance au centre de gravité, & quant aux forces qui agiroient dans le sens *PM*, on verroit aisément qu'elles se détruisent réciproquement; donc l'attraction d'un corps de figure quelconque dans l'hypothèse qu'on vient d'examiner est comme la distance du corpuscule au centre de gravité.

X I.

PROPOSITION V. PROBLÉME V.

Trouver l'attraction de la surface sphérique ABC *sur le corpuscule* P, *en supposant que toutes les parties de cette sphére l'attirent par une force qui agisse en raison renversée de la quatriéme puissance.*

Fig. 1. Alors $n = -4$. Reprenant donc l'expression générale de l'Article 1. & substituant à n sa valeur -4, elle deviendra $\frac{cg}{2rff}\left(\frac{-1}{+1}\left(\overline{f+g}^{\,-1} - \overline{f-g}^{\,-1}\right) + \frac{ff-gg}{-3}\left(\overline{f+g}^{\,-3} - \overline{f-g}^{\,-3}\right)\right)$ qui se réduit à $\frac{cg}{2rff}$

—

$\left(\text{———} \frac{2g}{f^2 - g^2} \text{———} \frac{1}{3} \frac{\overline{f-g}^3 - \overline{f+g}^3}{(ff-gg)^2} \right)$ ou $\frac{c}{3rf^2}$ $\times \frac{6f^2g^2 - 2cg^4}{(f^2-g^2)^2}$ qui exprime l'attraction de la petite ſurface infiniment mince $ABCD$ lorſque $n = -4$.

X I I.

C O R O L L A I R E.

Pour avoir l'attraction de l'orbe $ABCD\,abcd$ il faut multiplier cette expreſſion par la petite épaiſſeur Aa ou dg, ainſi on aura $\frac{6f^2g^2dg - 2g^4dg}{(f^2-g^2)^2} \times \frac{c}{3rf^2}$, dont l'intégrale $\frac{c}{3rf^2}$ $\left(\frac{2g^3}{f^2-g^2}\right)$ eſt l'expreſſion de l'attraction de la ſphére entiere ſolide $ABDS$ ſur le corpuſcule P dans cette hypothéſe de $n = -4$.

X I I I.

PROPOSITION VI. PROBLÊME VI.

Trouver l'attraction d'une ſurface ſphérique A I *ſur un corpuſcule placé en* P *dans l'intérieur de cette ſurface, en ſuppoſant que toutes les parties de cette ſurface agiſſent comme une puiſſance quelconque* n *de la diſtance.*

Je fais les lignes $AP = g$. $PS = f$. $PI = z$. $SE = v$. & j'ai par conſéquent $PE = \sqrt{f^2 - v^2}$, & $IP + PE = z + \sqrt{f^2 - v^2}$, d'un autre côté $IP + PE$ ou IE doit avoir pour valeur $\sqrt{gg - vv}$; on a donc l'équation $zz + 2z\sqrt{f^2 - v^2} + f^2 - v^2 = g^2 - v^2$ de laquelle on tire $\frac{g^2 - z^2 - f^2}{2z} = \sqrt{ff - vv}$, & partant $\frac{PE}{PS}$ ou le coſinus de l'angle IPQ ſera $= \frac{g^2 - z^2 - f^2}{2zf}$; Fig. 5.

mais par l'Art. 1. l'attraction de la petite portion de surface sphérique produite par la révolution de IH, a pour valeur $\frac{c}{r}(IH \times IQ \times \overline{IP}^n \times Cos.$ de $IPQ)$; donc à cause que $IH \times IQ = AS \times Qq = \frac{gz\,dz}{f}$ on aura $\frac{c}{r} z^n \times \frac{gz\,dz}{f} \left(\frac{g^2-f^2-z^2}{2fz}\right)$ ou $\frac{cg}{2rf^2}\left((g^2 - f^2)z^n dz - z^{n+2} dz\right)$ ce qui sera l'expression de l'attraction de la petite tranche IH de surface sphérique laquelle attirera le corps vers B, tant que IP sera un angle aigu avec AP.

En intégrant cette différentielle on aura $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{(g^2-f^2)z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^{n+3}}{n+3}\right)$, laquelle étant complettée par cette condition que tout se détruit quand z ou $PI = PA$ ou $g - f$, donne pour expression de l'attraction de la zone AI, $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{(g^2-f^2)z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^{n+3}}{n+3} - \frac{(g^2-f^2)\times(g-f)^{n+1}}{n+1} + \frac{(g-f)^{n+3}}{n+3}\right)$.

Afin d'avoir ensuite l'attraction de toute la surface sphérique $AIBA$, il faut faire dans la valeur précédente $z = g + f$, & alors elle deviendra $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{g^2-f^2}{n+1}\times\left(\overline{g+f}^{n+1} - \overline{g-f}^{n+1}\right) + \overline{g-f}^{n+3} - \overline{g+f}^{n+3}\right)$, qui exprimera l'attraction de toute la surface sphérique $AIBA$ sur le corpuscule placé en P. *C. Q. F. T.*

XIV.

SCHOLIE.

Dans les cas où cette valeur sera positive, l'attraction se fera vers A & au contraire.

X V.

PROPOSITION VII. PROBLEME VII.

Trouver l'attraction de la même surface sphérique, en supposant $n = -2$.

Conservant les dénominations de la Proposition précédente, & substituant dans l'expression qu'on y a trouvée à la place de n sa valeur -2, on verra que tous les termes disparoissent, & que par conséquent dans cette loi d'attraction un corps placé dans l'intérieur d'une sphére creuse n'éprouveroit aucune attraction.

X V I.

PROPOSITION VIII. PROBLÉME VIII.

Trouver l'attraction de la surface sphérique AIBA, *en supposant* $n = 1$.

Gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura dans Fig. 5.
cette hypothèse $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{\overline{g-f}^4 - \overline{g+f}^4}{4} - \frac{g^2-f^2}{2}\left(\overline{f+g}^2 - \overline{f-g}^2\right)\right)$ qui se réduit à $\frac{cg}{2rf^2} \times -4f^3g$ ou $-\frac{2cfg^2}{r}$ pour l'attraction de la surface AI, laquelle tirera le corps vers S puisque l'expression est négative.

X V I I.

C O R O L L A I R E.

Multipliant cette quantité par dg, on aura $-\frac{2cfg^2dg}{r}$ Fig. 6.
pour l'attraction de l'orbe infiniment mince AIi sur le corpuscule P vers S, & son intégrale $\frac{2cfg^3}{3r}$ exprimera l'attraction

de l'orbe *API* ſur *P*, pourvu qu'on retranche le terme $\frac{2cf^4}{3r}$ que devient cette quantité lorſque $f=g$.

Donc alors $\frac{2cfg^3-2cf^4}{3r}$ ſera l'attraction de l'orbe *API* ſur *P* vers *S*; mais l'attraction de la ſphére *PS* ſur le même corpuſcule *P* laquelle ſe feroit auſſi vers *S*, feroit $\frac{2cf^4}{3r}$ (ſelon l'Art. 9.) lorſque $f=g$, donc $\frac{2cfg^3}{3r}$ exprime l'attraction de la ſphére pleine entiere *AI* ſur le corpuſcule *P* placé au dedans d'elle, cette attraction ſe faiſant toujours vers *S* & en raiſon directe de la diſtance. *C. Q. F. T.*

XVIII.

PROPOSITION IX. PROBLÉME IX.

Trouver l'attraction qu'éxerce vers A *la ſurface ſphérique* AIa *ſur le corpuſcule placé dans l'intérieur de cette ſphére, en ſuppoſant* $n=-4$.

Fig. 5. Conſervant toujours les mêmes dénominations & reprenant la formule générale, (Art. 1.) & y ſubſtituant -4 pour n, on aura

$$\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{g^2-f^2}{-3(f+g)^3}-\frac{g^2-f^2}{3(f-g)^3}+\frac{\frac{1}{g-f}-\frac{1}{g+f}}{-1}\right)$$ qui ſe réduit à $\frac{cg}{2rf^2}\times\frac{8f^3}{3(g^2-f^2)^2}$ ou $\frac{4cgf}{3r(g^2-f^2)^2}$ pour l'attraction cherchée de la ſurface ſphérique *AIA*, dont la direction ſera vers *A*.

XIX.

COROLLAIRE I.

Fig. 6. Multipliant cette derniere quantité par dg, on aura $\frac{4cfgdg}{3r(g^2-f^2)^2}$ pour

pour l'attraction de l'orbe infiniment mince *AIai* fur le corps *P* vers *A*, & en intégrant cette quantité, on aura $\frac{-2cf}{3r(g^2-f^2)}$ qui exprime l'attraction d'un orbe fini lorfqu'on aura ajouté à cette quantité la conftante relative à l'épaiffeur de cet orbe.

Suppofant que cette conftante foit *A* lorfque l'orbe au lieu d'être terminé à la furface *AI* dont le rayon eft *g*, l'eft à la furface *BL* dont le rayon eft *h*, on aura alors $\frac{-2cf}{3r(h^2-f^2)}$ $= A$: retranchant cette expreffion de celle-ci $\frac{-2cf}{3r(g^2-f^2)} + A$, on aura le refte $\frac{2cf}{3r(g^2-f^2)} - \frac{2cf}{3r(h^2-f^2)}$ pour l'attraction de l'orbe fini *BLAI* fur le corpufcule *P* vers *B*.

X X.

COROLLAIRE II.

Si on faifoit $g = f$ alors l'intégrale deviendroit $\frac{2cf}{3r(o)}$ $\frac{-2cf}{3r(h^2-f^2)} = \infty$, ce qui apprend que dans une fphére creufe le corpufcule qui feroit adhérent à la furface intérieure de la croute folide de cette fphére éprouveroit une attraction infinie dans cette fuppofition de $n = -4$.

X X I.

COROLLAIRE III.

Pour avoir l'attraction qu'un corpufcule *P* placé au-dedans d'une fphére *AI* éprouve de la part de cette fphére, il faut prendre la différence de l'attraction de l'orbe *API* vers *A* fur le corpufcule, & de la fphére *PQ* vers *S* fur le même corpufcule; mais comme ces deux attractions font infinies, l'attraction cherchée fe trouveroit dépendre de deux infinis ; recherche qui Fig. 8.

demande beaucoup de circonſpection pour ne s'y pas tromper. Je vais donner le moyen de la déterminer.

On voit d'abord par le raiſonnement ſuivant que cette différence de deux quantités infinies ne peut dans ce cas être que finie.

Fig. 9. Soit imaginée la ſphére *AV* au dedans de la ſphére *AI*, & que cette ſphére *AV* ait le corpuſcule *P* placé à ſon centre, & *AP* pour rayon, il eſt clair que toute la matiere compriſe dans cette ſphére intérieure, n'exerce aucune attraction ſur le corpuſcule placé en *P* ; donc la matiere compriſe dans le ſolide concavo-convexe *AIBLOD* eſt la ſeule partie de la ſphére propoſée qui attire : mais toutes les parties de ce ſolide étant à des diſtances finies du corpuſcule *P*, leur force totale ſur lui ne peut être que finie.

Pour trouver enſuite l'expreſſion du ſolide concavo-convexe *AIBLOD* ſur le corpuſcule placé en *P* centre de *AoD*, on ſuppoſera ce ſolide partagé en une infinité de tranches *IVLlui* par des ſphéres qui ont toutes *P* pour centre, & on cherchera l'attraction qu'exercent tous ces orbes ſur le corpuſcule *P*.

Dans cette recherche il faudra commencer par trouver l'attraction qu'une calotte *IVL* exerce ſur un corpuſcule placé à ſon centre.

Fig. 10. Pour cela, ayant fait le rayon *HP* de cette calotte $= a$, l'abciſſe *PQ* qui répond au point $I = x$, on aura $Iz = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ & le petit anneau produit par la révolution de Iz, lequel eſt l'élément de la calotte propoſée, ſera $\frac{c}{r}\sqrt{aa - xx} \times \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = \frac{cadx}{r}$, multipliant ce petit anneau par $\frac{1}{a^4}$ qui exprime l'attraction réciproquement proportionnelle à la quatriéme puiſſance de la diſtance *IP* des particules Iz au corpuſcule placé en *P*, & décompoſant enſuite cette force de *IP* ſuivant *PQ*, c'eſt-à-dire

la multipliant par $\frac{PQ}{IP}$ ou $\frac{x}{a}$, on aura $\frac{cxdx}{ra^4}$ pour l'attraction de l'anneau sur P, donc en intégrant on aura $\frac{cx^2}{2ra^4}$ pour l'attraction de l'anneau IF; donc celle de la calotte HI sera $\frac{c}{2r}$ $\left(\frac{aa-xx}{a^4}\right)$ c'est-à-dire $\frac{c}{2r}$ $\left(\frac{QI^2}{PI^4}\right)$ ou $\frac{c}{2r}$ $\frac{(Sin.\,QPI)^2}{PI^2}$ laquelle tireroit vers H.

Celle de la calotte VI sera la même & tirera de l'autre sens, puisque les deux attractions jointes ensemble doivent se détruire, une surface sphérique entiere n'exerçant point d'attraction sur le corpuscule placé à son centre.

Par ce moyen $\int \frac{c}{2r}$ $\frac{(Sin.\,QPI)^2\, Vu}{PI^2}$ sera la valeur de l'attraction du solide cherché.

Pour exécuter les opérations qu'indique cette expression, faisons comme dans l'Article 1. $PI = z$. $AS = g$. $SP = f$. on aura comme dans cet Article, $Cos.\, IPQ = \frac{g^2 - f^2 - z^2}{2zf}$, & pour le quarré du sinus du même angle $\left(1 - \left(\frac{g^2 - f^2 - z^2}{2zf}\right)^2\right)$ qu'il faut substituer dans la formule précédente. Fig. 9.

Ainsi on aura à intégrer $\frac{cdz}{2rzz}$ $\left(\frac{(2gg + 2ff)\, z^2 - z^4 - (g^2 - f^2)^2}{4z^2f^2}\right)$, c'est-à-dire $\frac{c}{8f^2r}\left(\frac{2gg+2ff}{zz}\,dz - \frac{(gg-ff)^2}{z^4}\,dz - dz\right)$: l'intégration faite il vient $\frac{c}{8rf^2}\left(-\frac{2gg+2ff}{z} + \frac{(gg-ff)^2}{3z^3} - z\right)$ à une constante près qu'il faut déterminer par cette condition que z devenant AP ou $g - f$ tout se détruise.

Par ce moyen l'intégrale complette cherchée sera $\frac{c}{8f^2r}$

$$\left(-\frac{2gg+2ff}{z} + \frac{(g^2-f^2)^2}{3z^3} - z + \frac{2ff+2gg}{g-f} - \frac{(gg-ff)^2}{3(g-f)^3} + g - f\right)$$

qui se réduit à $\frac{c}{8f^2r}\left(-\frac{2ff+2gg}{z}+\frac{(g^2-f^2)^2}{3z^3}-z+\frac{8gg+8ff-8fg}{3(g-f)}\right)$ & c'est-là la valeur de l'attraction du solide *AVIODL*.

Faisant ensuite dans cette valeur $z = PB = f + g$, on aura $\frac{cf}{3r(g^2-f^2)}$ pour l'attraction du solide proposé concavo-convexe *ABILO* sur *P*, ou, ce qui revient au même, pour celle de la sphére entiere *AIBA* sur le même corpuscule.

SECTION II.

SECONDE PARTIE.

De l'attraction des Corps de figure quelconque.

X.X I I.

PROPOSITION X. PROBLÉME X.

Trouver l'attraction d'un cercle sur un corps qui répond perpendiculairement à son centre.

Fig. 11. Soit le cercle *MBO*, il faut commencer à trouver l'attraction d'une particule quelconque *M* de ce cercle sur le corps *A*.

Supposant donc que la particule *M* attire le corps *A* suivant une puissance *n* de la distance, son attraction suivant la direction *AM* sera proportionnelle à AM^n; mais l'attraction suivant la direction *AM* se décompose suivant les directions *MP* & *AP*, celle selon *MP* n'est pas à compter, parce qu'elle est détruite par l'attraction de la particule qui tireroit dans la direction opposée *OP*. On ne compte donc que l'attraction suivant *AP* qui sera $\frac{AP}{AM}\times AM^n = AP\times AM^{n-1}$.

Pour

Pour mettre cette expreſſion en valeurs analytiques, ſoit fait $AP = a$. $PM = x$. $AM = \sqrt{a^2 + x^2}$. $Mm = dx$, la valeur de la circonférence Mo dont le rayon eſt x ſera $\frac{cx}{r}$, donc l'attraction $AP \times AM^{n-1}$ de la particule M ſera $a(aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$ donc celle de la circonférence entiere Mo ſur le corpuſcule A, ſuivant AP ſera $\frac{acx}{r} \times (aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$; car toutes les particules qui compoſent cette circonférence agiſſent de la même maniere ſur le corpuſcule A, puiſqu'il répond perpendiculairement à ſon centre, & qu'elles ſont par conſéquent toutes placées de même par rapport à ce corpuſcule. Donc l'attraction de la petite couronne $AmoD$ ſera $\frac{acxdx}{r} \times (a^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}}$, & $\frac{ac}{r} \times \frac{(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$ ſera l'attraction du cercle entier MBO ſur le corpuſcule A, lorſqu'on aura ajouté la conſtante convenable, on trouvera ce qu'eſt cette conſtante en faiſant $x = o$, car alors comme le cercle ſera nul, ſon attraction devra être nulle auſſi.

Or, lorſque $x = o$ la quantité $\frac{ac}{r} \times \frac{(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$ devient $\frac{ac}{r}(a^2)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{ca^{n+2}}{r(n+1)}$, donc $\frac{ac}{r(n+1)}(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{ca^{n+2}}{r(n+1)}$ ou $\frac{c}{r(n+1)}(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+2})$ ſera l'attraction du cercle BMO ſur le corpuſcule A dans la direction AP. *C. Q. F. T.*

XXIII.

COROLLAIRE.

Si l'attraction ſe faiſoit en raiſon renverſée de la diſtance, c'eſt-à-dire ſi on avoit $n = -1$, l'intégration précédente ne

donneroit rien, & la valeur cherchée ou l'attraction du cercle dépendroit des logarithmes. On la trouveroit ainfi.

La différentielle $\frac{acxdx}{r} \times (aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$ feroit $\frac{acxdx}{r(aa+xx)}$ dont l'intégrale eft $\frac{ac}{2r} L(aa+xx)$, laquelle devient $\frac{ac}{2r} L(a^2)$ ou $\frac{ac}{r} La$ lorfque $x=o$; donc cette intégrale complette fera $\frac{ac}{2r} L(aa+xx) - \frac{ac}{r} La$, ou $\frac{c}{r} AP \times l\,AM - \frac{c}{r} AP \times l\,AP$, qui eft par conféquent l'attraction du cercle BMO dans cette hypothèfe.

XXIV.

PROPOSITION XI. PROBLEME XI.

Trouver l'attraction du folide produit par la révolution de la courbe quelconque BM *autour de fon axe* BP, *fur le corpufcule* A *placé fur cet axe.*

Fig. 11. Je commence par faire les lignes $AB=a$. $BP=x$. $PM=y$. $AM=\sqrt{(a+x)^2+y^2}$. $Pp=dx$. L'attraction du cercle dont PM eft le rayon, eft, felon la formule de l'Art. 22. $\frac{c}{r(n+1)}(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+1})$; donc dans les dénominations préfentes l'attraction du cercle dont le rayon eft PM fera $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x} \times \overline{\overline{a+x}^2+y^2}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+1}\right)$; donc l'attraction du petit cilindre $MmPp$ fera $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x} \times dx \times \overline{\overline{a+x}^2+y^2}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+1} \times dx\right)$, dont l'intégrale eft l'attraction du folide PBM, produit par la révolution de BM autour de l'axe PB.

Ainsi lorsque y sera donnée en x par l'équation de la courbe proposée, on la substituera dans cette valeur qui étant alors toute en x & en constantes s'intégrera par les méthodes ordinaires, ou se réduira aux quadratures.

XXV.

COROLLAIRE.

Dans le cas ou $n = -1$, l'attraction du cercle BMO étant (Article 23.) $\frac{c}{r} AP \times l\,AM - \frac{c}{r} AP \times l\,AP$, on aura, en employant les dénominations de cette Proposition $\frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx\, L\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} - \overline{a+x} \times dx \times L\,\overline{a+x}.\right)$ celle du solide entier MBH dans la même hypothèse sera $\int \frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} - \overline{a+x} \times dx \times L\,\overline{a+x}.\right)$

XXVI.

PROPOSITION XII. PROBLÉME XII.

Trouver l'attraction qu'un cylindre OKMN *exerce sur un corpuscule placé en* A *dans son axe de révolution* ABP.

Je fais les lignes $PM = b$. $AB = a$. $BP = x$. $AM = \sqrt{(a+x)^2 + bb}$. $AO = \sqrt{aa+bb}$, & alors l'expression de l'Article 24. c'est-à-dire, l'attraction du petit cylindre deviendra dans les dénominations présentes $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x} \times dx \times \overline{\overline{a+x}^2 + bb}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+2} \times dx\right)$, dont l'intégrale est $\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{\left(\overline{a+x}^2 + bb\right)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} - \frac{\overline{a+x}^{n+3}}{n+3}\right)$, pour com- Fig. 13.

pletter cette intégrale je fais $x = o$, & j'ai alors $\frac{c}{r(n+1)}$ $\left(\frac{\overline{aa+bb}^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} - \frac{a^{n+3}}{n+3}\right)$: donc $\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{\left(\overline{a+x}^{2}+bb\right)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} - \frac{\overline{aa+bb}^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} + \frac{a^{n+3}}{n+3}\right)$ ou $\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{1}{n+3}\left(AM^{n+3} - AP^{n+3} - AO^{n+3} + AB^{n+3}\right)\right)$ sera l'attraction du cilindre $OKMN$ sur le corpuscule A placé à la distance donnée de ce cilindre. *C. Q. F. T.*

XXVII.

PROPOSITION XIII. PROBLÊME XIII.

Trouver l'attraction du cilindre OKMN *sur le corpuscule* A, *en supposant* n $= -1$.

Fig. 13. Pour avoir dans ce cas l'attraction du cilindre il faut intégrer $\frac{c}{r}\left(\overline{a+x}\,dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right) - \frac{c}{r}\left(\overline{a+x}\,dx\; L\;\overline{a+x}\right)$ qui est ce que devient l'expression générale trouvée, (Art. 25.) lorsque $n = -1$ comme dans cette supposition, & que $y = b$ par la nature du cilindre.

Pour intégrer la premiere partie je fais $\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb} = z$; ce qui donne $\overline{a+x}\,dx = z\,dz$, & transforme par conséquent $\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right)$ en $z\,dz \times Lz$ dont l'intégrale est $\frac{1}{2}zzLz - \int\frac{1}{2}zz\,dLz$ ou $\frac{1}{2}zzLz - \frac{1}{4}zz$: donc en remettant AM pour z qu'il représente, l'intégrale de la premiere partie $\frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right)$ de

la

la quantité à intégrer fera $\frac{c}{2r} AM^2 \times l\,AM - \frac{c}{4r} AM^2$ à une conftante près qu'on déterminera enfuite.

L'intégrale de la feconde partie $\overline{a+x} \times dx \times L\,\overline{a+x}$ fera $\frac{1}{2}\overline{a+x}^2\ L\,\overline{a+x} - \int \frac{1}{2}\overline{a+x}\,dx$, ou $\frac{1}{2}\overline{a+x}^2\ L\,\overline{a+x} - \frac{1}{2}\overline{a+x}^2$ ou en remettant les valeurs en lignes $\frac{1}{2} AP^2\ l\,AP - \frac{1}{2} AP^2$.

Donc l'intégrale totale fera $\frac{c}{2r} AM^2 \times l\,AM - \frac{c}{4r} AM^2 - \frac{c}{2r} AP^2 \times l\,AP + \frac{c}{4r} AP^2$ ou $\frac{c}{2r}\left(AM^2 \times l\,AM - AP^2 \times l\,AP - \frac{1}{2} BO^2\right)$, & on la complettera en faifant enforte que tout fe détruife lorfque x eft égal à zéro.

L'intégrale complette fera ainfi $\frac{c}{2r}\left(AM^2 \times l\,AM - AP^2 \times l\,AP - AO^2 \times l\,AO + BA^2 \times l\,AB - \frac{1}{2} BO^2\right)$ qui eft l'expreffion de l'attraction totale du cylindre $OKMN$ fur le corpufcule A dans la fuppofition de $n = -1$. *C. Q. F. T.*

XXVIII.

PROPOSITION XIV. PROBLÊME XIV.

Trouver l'attraction du cylindre OKMN *fur le corpufcule* A, *en fuppofant* n = — 3.

Dans cette fuppofition de la valeur de n, l'intégration faite dans l'Art. 26. ne fçauroit avoir lieu, & il faut reprendre alors la différentielle $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x}\,dx \times \left(\overline{a+x}^2 + b^2\right)^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+2} \times dx\right)$ de l'attraction cherchée, qui devient Fig. 13.

dans ce cas $-\frac{c}{2r}\left(\frac{\overline{a+x}\,dx}{\overline{a+x}^2+b^2}-\frac{dx}{a+x}\right)$ ou $\frac{c}{2r}\left(\frac{dx}{a+x}\right.$ $\left.-\frac{\overline{a+x}\,dx}{\overline{a+x}^2+bb}\right)$, dont l'intégrale eſt $\frac{c}{2r}\left(Log.\,\overline{a+x}-Log.\right.$ $\left.\left(\overline{a+x}^2+bb\right)\right)$, ou $\frac{c}{2r}(l\,AP-l\,AM)$ laquelle étant complettée donne $\frac{c}{2r}(l\,AP-l\,AM-l\,AB+l\,AO)$ ou $\frac{c}{2r}\left(l\,\frac{AO\times AP}{AB\times AM}\right)$ pour l'attraction cherchée dans la préſente hypothèſe.

XXIX.

PROPOSITION XV. PROBLÈME XV.

Suppoſant que la particule M *attire en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, trouver l'attraction du cylindre* OKMN *ſur le corpuſcule* A *placé ſur le prolongement de ſon axe.*

Fig. 13. Dans cette ſuppoſition de $n=-2$ la quantité $\frac{c}{r(n+1)}$ $\left(\frac{1}{n+3}AM^{n+3}-\frac{AP^{n+3}}{n+3}-\frac{AO^{n+3}}{n+3}+\frac{AB^{n+3}}{n+3}\right)$ qui eſt l'expreſſion générale de l'attraction du cylindre BPM, devient $-\frac{c}{r}(AM-AP-AO+AB)$ ou $\frac{c}{r}(BP-AM+AO)$ laquelle, en décrivant l'arc OH du centre A & du rayon AO, peut s'écrire ainſi, $-\frac{c}{r}(OM-HM)$ ou $\frac{c}{r}OL$ en décrivant l'arc HL du centre M & du rayon MH; donc $\frac{c}{r}OL$ eſt l'attraction du cylindre $OKMN$ ſur le corpuſcule A, en ſuppoſant que ſes parties attirent en raiſon renverſée du quarré des diſtances à ce corpuſcule. *C. Q. F. T.*

XXX.

PROPOSITION XVI. PROBLÉME XVI.

Supposant que l'attraction agisse dans une proportion plus grande que la raison inverse du cube des distances, & que cet excès soit marqué par l'indéterminée m, *on demande quelle sera l'attraction du cylindre* OKMN *sur le corpuscule* A *placé sur son axe.*

On aura dans ce cas $n = -3 - m$, & l'expression générale Fig. 131
$\frac{c}{r(n+1)(n+3)}\left(AM^{n+3} - AP^{n+3} - AO^{n+3} + AB^{n+3}\right)$
sera $\frac{c}{mr(2+m)}\left(\frac{1}{AM^m} - \frac{1}{AP^m} - \frac{1}{AO^m} + \frac{1}{AB^m}\right)$, valeur de l'attraction du cylindre *OKMN* dans le cas de la Proposition présente.

XXXI.

COROLLAIRE I.

Supposant à présent $m = 1$, on aura $n = -4$, & par conséquent l'expression générale ci-dessus devient $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AP} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$.

XXXII.

COROLLAIRE II.

En supposant $AP = \infty$, on aura $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$ ou $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AO}\right)$, par laquelle on apprend que lorsque la distance *AB* est très-petite, l'attraction est très-grande, & que si cette distance étoit infiniment petite, l'attraction seroit infiniment grande.

XXXIII.

COROLLAIRE III.

Si le cylindre eſt infini dans le ſens BO & qu'on ait par conſéquent $BO = \infty$, l'attraction ſera alors exprimée par $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{c}{3r} \times \frac{1}{AB}$, c'eſt-à-dire qu'elle ſera en raiſon inverſe de la diſtance.

XXXIV.

SCHOLIE I.

On voit par ces deux cas, que lorſque le ſolide eſt infini & la diſtance AB finie, non ſeulement ſon attraction n'eſt pas infinie ſur le corpuſcule hors de lui, mais qu'elle différe peu de ce qu'elle feroit dans la ſuppoſition des dimenſions finies, mais beaucoup plus grandes que la diſtance AB.

Pour en donner un exemple, ſuppoſons le cylindre tel que la baſe $AP = 101\ AB$, & ſa hauteur $BO = 50\ AB$; l'expreſſion générale $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AP} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$ deviendra alors $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{113\,AB} - \frac{1}{101\,AB} - \frac{1}{50\,AB} + \frac{1}{AB}\right)$ dont les trois premiers termes ſe réduiſent à $-\frac{0,02105}{AB}$, c'eſt-à-dire, que dans ce cas l'attraction ne différe de ce qu'elle feroit ſi les dimenſions étoient infinies que d'une fraction qui eſt entre $\frac{1}{47}$ & $\frac{1}{48}$.

XXXV.

SCHOLIE II.

Lorſque m eſt poſitif & que par conſéquent n eſt négatif & plus,

plus grand que 3, on voit que dans le cas où le corps a des dimensions très-grandes par rapport à la distance du corpuscule, son attraction sera sensiblement la même que s'il étoit infini, & dans ce cas l'expression de son attraction pourra toujours être réduite à $\frac{c}{r(2+m)}\left(\frac{1}{mAB^m}\right)$.

XXXVI.

SCHOLIE III.

Si le corpuscule *A* est placé sur l'axe au dedans du cylindre en prenant $Ab = AB$, & menant le plan *OBK* parallèle aux faces *OBK*, *MPN* du cylindre, il seroit aisé de remarquer que la partie *OBKoK* du cylindre ne sçauroit exercer aucune attraction sur le corpuscule *A*, parce que les forces de toutes ses parties se détruisent mutuellement; ainsi le Problême est en ce cas le même que lorsque le corpuscule est au dehors du cylindre, à la même distance de la surface extérieure *OBK*, toute la différence c'est que le cylindre attractif qui est alors *obKMN* est plus petit; mais si les dimensions du cylindre sont infinies comme dans le cas qu'on vient de considérer, l'attraction d'un corpuscule placé au dedans ou au dehors sera précisément la même, pourvu que la distance du corpuscule à la surface extérieure soit la même. 



SECTION II.

TROISIEME PARTIE.

De l'attraction des sphéroïdes en particulier.

XXXVII.

PROPOSITION XVII. PROBLÊME XVII.

Trouver l'attraction qu'un sphéroïde BMO *exerce sur un corpuscule* A *placé sur son axe de révolution dans l'hypothèse que ses parties attirent en raison renversée du quarré de la distance.*

Fig. 15. Je commence par faire les lignes $AB = f$. $BC = a =$ au demi axe du sphéroïde. $PB = x$. $PM = y$. $CD = b =$ au rayon de l'équateur, on aura par la propriété de l'ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - xx}$;

donc $AM = \sqrt{(f+x)^2 + yy} = \sqrt{\frac{bb}{aa}(2ax - xx) + ff + 2fx + xx}$.

Faisant à présent $n = -2$ dans la valeur $\frac{c}{r(n+1)}$ $(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+2})$ de l'attraction du cercle PM sur le corpuscule A trouvée (Article 22.) lorsque l'attraction est supposée agir comme une puissance n de la distance : on aura $\frac{c}{r}\left(1 - \frac{AP}{AM}\right)$ pour l'attraction du cercle PM dans la supposition présente, c'est-à-dire, que $\int\left(\frac{c\,dx}{r} - \frac{c(f+x)\,dx}{r\sqrt{\frac{bb}{aa}(2ax - xx) + ff + 2fx + xx}}\right)$ sera l'attraction cherchée.

Pour intégrer cette quantité au lieu de $\frac{bb}{aa}$ $(2ax - xx)$ $+ f^2 + 2fx + xx$, j'écris $f^2 + 2\left(f + \frac{bb}{a}\right)x + \left(1 - \frac{bb}{aa}\right)$ xx, & des 2 cas que renferme cette valeur dans la suppoſition de $\frac{bb}{aa} >$ ou $<$ que 1, je choiſis d'abord celui où $\frac{bb}{aa} > 1$, c'eſt-à-dire ou $b > a$, ou, ce qui revient au même, celui où le ſphéroïde eſt applati.

Premier Cas. Au lieu de $\frac{bb}{aa} - 1$, je mets $\frac{gg}{aa}$ & la partie ci-deſſus devient $f^2 + 2\left(f + \frac{bb}{a}\right)x - \frac{gg}{aa}xx$, ou (en faiſant $f + \frac{bb}{a} = h$), $f^2 + 2hx - \frac{gg}{aa}xx$.

Je fais enſuite $\frac{ha^2}{gg} - x = u$, & cette quantité ſe change en $\frac{gg}{aa}\left(\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu\right)$: de $\frac{ha^2}{gg} - x = u$ on tire $-dx = du$.

L'autre partie de la différentielle, ſçavoir, $f + x$ devient par les mêmes ſubſtitutions $= f + \frac{ha^2}{gg} - u$, ce qui change la différentielle propoſée en $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f + \frac{ha^2}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{hha^4}{g^4} - uu}}\right)$ que l'on voit aiſément être en partie intégrable, & en partie réductible à un arc de cercle.

Je commence par mettre à part les termes $- du -$ $\frac{\frac{a}{g}udu}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}$ dont l'intégrale eſt $- u + \frac{a}{g} \times$

$\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}$. L'autre partie $\dfrac{\left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{hha^4}{g^4} - uu}}$ de la même différentielle, aura pour intégrale le produit de $\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}$ par l'angle dont le finus eft u pour le rayon $\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2} + \frac{h^2a^4}{g^4}}$: par conféquent l'intégrale entiere eft $\frac{c}{r}$ $\left(-u + \frac{a}{g}\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu} + \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang.}\,Sin.\ \frac{u}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2} + \frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$, & en remettant pour u fa valeur $\frac{ha^2}{g^2} - x$, l'intégrale propofée deviendra $\frac{c}{r}\left(-\frac{ha^2}{gg} + x + \frac{a}{g}\sqrt{\frac{aa}{ff} + \frac{2ha^2}{gg}x - xx} + \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang.}\ Sinus\ \frac{\frac{ha^2}{gg} - x}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$, & faifant $x = o$ pour completter cette intégrale, on aura la quantité $\frac{c}{r}\left(x + \frac{a}{g}\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{2ha^2}{gg}x - xx}\right.$ $+ \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang.}\ Sinus\ \frac{\frac{ha^2}{g^2} - x}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4}}} - \frac{ha^2}{gg}$ $\left. - \left(\frac{ha^3}{g} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang.}\,Sin.\ \frac{\frac{ha^2}{gg}}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$: ce qui exprimera

exprimera l'attraction de la portion de sphéroïde *BMP* sur le corpuscule *A*.

En faisant dans cette valeur $x = 2a$, on aura la quantité $\frac{c}{r}\left(2a + \frac{aa}{gg} \times \overline{f + 2a} + \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang. } Sinus \, \frac{ha^2 - 2agg}{\sqrt{a^2ffgg + h^2a^4}} - \frac{haa}{gg} - \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang. } Sinus \, \frac{ha^2}{\sqrt{a^2ffgg + h^2a^4}}\right)$: ce qui est l'expression de l'attraction du sphéroïde entier *BMO*, dont toutes les parties sont supposées attirer en raison inverse du quarré des distances, dans le cas de l'applatissemeut vers les pôles. *C. Q. F. T.*

Second Cas. Supposons à présent $\frac{bb}{aa} < 1$, ce qui rendroit le sphéroïde allongé, on voit qu'en ce cas la quantité $\frac{gg}{aa}$ sera négative ; & qu'ainsi, en supposant que $\frac{gg}{aa} = 1 - \frac{bb}{aa}$ au lieu de $\frac{bb}{aa} - 1$, le calcul précédent seroit le même, pourvu qu'on substituât $-\frac{gg}{aa}$ à la place de $+\frac{gg}{aa}$. Faisant donc cette substitution dans la différentielle $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f + \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}\right)$,

on aura $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{\sqrt{-gg}}\left(f - \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{-\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}\right)$,

ou $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f - \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg} - \frac{hha^4}{g^4} + uu}}\right)$, ou enfin

$$\frac{c}{r}\left(-du-\frac{\frac{a}{g}udu}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}}+\frac{\frac{a}{g}\left(f-\frac{haa}{gg}\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}},\right)$$

dont l'intégrale est $\left(-u-\frac{a}{g}\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}+\frac{a}{g}\right.$

$\left(f-\frac{haa}{gg}\right)\times Log.\left.\frac{\left(u+\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}}}\right)$ qui

en remettant pour u sa valeur $-\frac{haa}{gg}-x$ se change en

$$\frac{c}{r}\left(\frac{haa}{gg}+x-\frac{a}{g}\sqrt{x^2+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}+\frac{a}{g}\left(f-\frac{a^2h}{gg}\right)\right.$$

$$\left.\times L\frac{\left(-\frac{ha^2g}{gg}-x+\sqrt{x^2+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right).$$

C'est-là la valeur cherchée de l'attraction de la portion BPM du sphéroïde allongé sur le corpuscule A, à une constante près qu'on déterminera en faisant $x=o$, & alors on aura

$$\frac{c}{r}\left(x-\frac{a}{g}\sqrt{xx+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}+\frac{a}{g}\left(f-\frac{ha^2}{gg}\right)\times L\right.$$

$$\frac{\left(-\frac{haa}{gg}-x+\sqrt{xx+\frac{2haax}{gg}+\frac{aaff}{gg}}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}+\frac{a^2f}{gg}$$

$$\left.-\frac{a}{g}\left(f-\frac{haa}{gg}\right)\times L\frac{\left(-\frac{haa}{gg}-\frac{af}{g}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}}}\right)$$: expression qui

eſt celle de l'attraction de la portion *BPM* du ſphéroïde allongé *BMO* ſur le corpuſcule *A*.

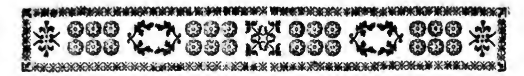
Qu'on faſſe à préſent dans cette expreſſion $x = 2a$, elle deviendra

$$\frac{c}{r}\left(-\frac{2abb}{gg}+\left(\frac{af}{g}-\frac{ha^3}{g^3}\right)\times L\,\frac{\left(-\frac{ha^2}{gg}-2a+\frac{a}{g}\times\overline{f-2a}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{af}{g}-\frac{ha^3}{g^3}\right)\times L\,\frac{\left(\frac{ha^2}{gg}-\frac{af}{g}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$$

: ce qui eſt l'attraction du ſphéroïde entier *BMO* lorſque $\frac{bb}{aa} < 1$, ou que $b < a$, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt allongé.





SECTION III.

Explication de la réfraction de la Lumiere, en employant le principe de l'attraction.

I.

Les effets que les corps exercent les uns sur les autres par leur attraction, ne sont sensibles que lorsqu'elle n'est pas absorbée par celle de la terre, & l'on a vu que cette attraction mutuelle des corps ne s'apperçoit sensiblement que lorsqu'ils sont presque contigus, & qu'alors elle agit dans un rapport plus que triplé des distances ; or les corps agissant sur la lumiere d'une maniere sensible, il est certain que si l'attraction en est la cause, elle doit suivre ce rapport.

L'avantage du principe de l'attraction est de n'avoir besoin d'aucune supposition ; mais seulement de la connoissance des phénoménes, & plus les observations & les expériences sont exactes, plus il est facile d'appliquer le principe attractif à leur explication.

I I.

On sçait assez que la lumiere se détourne de son chemin en traversant obliquement des milieux de différente densité. *Snellius*, & depuis lui *Descartes*, ont trouvé par l'expérience que le sinus d'incidence & celui de réfraction sont toujours en raison constante.

M. *Newton* employe la quatorziéme & derniere Section de son premier Livre à faire voir la raison pour laquelle ces sinus doivent être

être en raiſon conſtante, & à prouver que ce rapport dépend du principe attractif.

M. *Clairault* a éclairci & démontré cette théorie de M. *Newton* dans un mémoire donné à l'Académie en 1739. & dont je parlerai ci-après.

I I I.

Tout rayon de lumiere qui pénétre obliquement dans un milieu quelconque, eſt dans le cas d'un mobile ſollicité en même temps par deux forces, & c'eſt ainſi qu'il faut conſidérer les rayons afin de pouvoir appliquer à leurs effets les principes de la méchanique.

Deſcartes & *Fermat* conſidérérent la lumiere comme un corps d'une grandeur ſenſible, & ſur lequel les milieux agiſſent de la même maniere qu'ils paroiſſent le faire ſur les autres corps : & trouvant que les milieux que la lumiere traverſe faiſoient ſur elle des effets contraires à ceux qui devoient réſulter des principes méchaniques, ils imaginérent chacun une hypothèſe pour accorder dans ce cas les loix de la méchanique dont on ne peut douter, & les effets phyſiques qui ſont preſque auſſi certains.

I V.

On ſçait que plus les milieux ſont denſes, plus ils réſiſtent aux corps qui tendent à ſéparer leurs parties en les pénétrant ; or dans ce cas l'angle rompu eſt plus grand que l'angle d'incidence, parce que la vîteſſe verticale du corps étant diminuée par la réſiſtance du milieu, la vîteſſe horiſontale influe davantage dans la direction de la diagonale que le corps parcourt en obéiſſant à ces deux forces, dans leſquelles ſon mouvement ſe décompoſe.

C'eſt par ce principe que lorſque la réſiſtance du milieu eſt invincible, le corps au lieu de le pénétrer retourne ſur ſes pas par ſon élaſticité, & l'on pourroit donner telle proportion entre cette réſiſtance & la vîteſſe verticale du corps, que ce corps perdroit tout ſon mouvement vertical, & gliſſeroit ſur la ſurface du

milieu, s'il étoit sans ressort & que cette surface fut un plan parfaitement poli.

V.

Or il arrive tout le contraire aux rayons de lumiere, plus le milieu qu'ils traversent est dense, plus le sinus d'incidence surpasse celui de réfraction ; donc la vîtesse verticale des rayons est augmentée dans ce cas, & il leur arrive alors tout le contraire de ce que les loix de la méchanique paroissent indiquer.

Descartes pour les accorder avec l'expérience qu'il ne pouvoit éluder, prétendoit que plus les milieux étoient denses, plus ils ouvroient un passage facile à la lumiere. Mais c'étoit donner de ce phénoméne une raison plus capable de le faire révoquer en doute que l'expliquer.

VI.

Fermat trouvant l'explication physique de *Descartes* impossible à admettre, aima mieux avoir recours à la métaphysique & aux causes finales. Il se retrancha donc à dire qu'il étoit convenable à la sagesse de l'auteur de la nature, de faire aller la lumiere d'un point à un autre par le chemin du plus court temps, puisqu'elle n'y va pas par le chemin le plus court qui seroit la ligne droite. Ce principe admis, il suivoit que les sinus d'incidence & de réfraction étoient entr'eux comme les facilités des milieux à être pénétrés.

VII.

Il est aisé de voir comment l'attraction donne le dénouement de cette difficulté ; car ce principe montre que le mouvement progressif de la lumiere n'est pas seulement moins retardé dans le milieu le plus dense, comme le vouloit *Descartes*, mais qu'il est réellement accéléré, & cela par l'attraction du milieu plus dense lorsqu'il le pénétre.

Ce n'est pas seulement lorsque le rayon a atteint le milieu refringent & au point d'incidence, qu'il agit sur lui ; l'incurvation

du rayon commence un peu auparavant, & elle augmente à mesure qu'il approche du milieu refringent, & même dans l'intérieur de ce milieu jusqu'à une certaine profondeur.

L'attraction rend compte de tout ce qui arrive à la lumiere dans ce passage d'un milieu dans un autre : car le rayon augmente sa vîtesse verticale dans le milieu plus dense qu'il traverse jusqu'à ce qu'il soit parvenu au point où les parties supérieures & inférieures de ce corps agissent également sur lui. Alors il continue son chemin avec la vîtesse acquise, jusqu'à ce qu'étant prêt à en sortir, les parties supérieures de ce milieu l'attirent plus fortement que les parties inférieures. La vîtesse verticale du rayon est diminuée par-là, & la courbe qu'il décrit à son émergence est parfaitement égale & semblable à celle qu'il a décrit à son incidence (en supposant les surfaces qui terminent le milieu refringent parallèles) : & cette courbe est dans une position entierement opposée à la premiere qu'il avoit décrit : le rayon enfin passe par des dégrés de rétardation qui sont dans le même rapport & le même ordre inverse que les dégrés d'accélération qu'il a eu à son incidence.

VIII.

L'illustre M. *Newton*, qui étoit aussi supérieur dans l'art de faire des expériences que dans celui de les employer, a trouvé en examinant la déviation du rayon dans les différens milieux, que l'attraction exercée sur les particules de la lumiere est en raison de la densité de ces milieux, si l'on en excepte ceux qui sont gras & sulphureux.

Puisque la différente densité de ces milieux est la cause de la réfraction de la lumiere, plus les corps seront homogénes, & plus ils seront transparens, & les plus hétérogénes seront les plus troubles; car la lumiere en les traversant, étant perpétuellement détournée en des sens différens, dans l'intérieur de ces corps, il en reviendra d'autant moins de rayons vers nos yeux. C'est ce qui

fait que par un ciel ferain on diftingue fi bien les étoiles, au lieu que lorfque l'air eft chargé de vapeurs, leurs rayons ne peuvent plus arriver jufqu'à nous.

IX.

On déduit auffi du principe de l'attraction la caufe pour laquelle la réfraction fe change eu réflection à une certaine obliquité d'incidence, lorfque le rayon va d'un milieu plus denfe dans un moins denfe ; car dans le paffage du rayon d'un milieu plus denfe dans un autre qui l'eft moins, la courbe qu'il décrit eft infléchie vers le milieu plus denfe d'où il fort; or la proportion entre fon obliquité & la force qui le rappelle vers le corps, peut être telle qu'il arrive à la fituation paralléle à la furface du milieu qu'il abandonne, avant d'être forti des limites dans lefquelles l'attraction de ce corps agit fur lui, & l'on voit qu'alors il doit retourner vers le milieu refringent d'où il fortoit, en décrivant une branche de courbe égale & femblable à celle qu'il avoit décrit en fortant, & reprendre par conféquent après être rentré dans le milieu, la même inclinaifon que celle qu'il y avoit avant d'en fortir.

X.

L'action des milieux que la lumiere traverfe, peut donner aux rayons l'obliquité qui leur manque pour être réfléchis, & comme plus les milieux contigus différent en denfité, moins il faut d'obliquité d'incidence pour que la réflection commence ; le cas où les rayons fe réfléchiront à la plus petite obliquité d'incidence, fera celui où l'efpace contigu au milieu refringent fera purgé d'air, & où le vuide fera le plus parfait. C'eft auffi ce qui arrive dans la machine pneumatique, dans laquelle plus on augmente le vuide, plus le rayon fe réfléchit promptement de deffus un prifme qu'on y a placé.

La réfraction fe change donc en réflection à différentes incidences felon la denfité des différens milieux. Le diamant qui eft le

le corps le plus brillant que nous connoissons, opére une réflection totale quand l'angle d'incidence est seulement de 30°, & c'est selon cet angle que les Jouaillers taillent leurs diamans, afin de perdre la plus petite quantité possible de la lumiere qu'ils reçoivent.

On sent aisément que lorsque le rayon passe d'un milieu plus rare dans un plus dense, la refraction ne peut jamais se changer en réflection quelle que soit l'obliquité de l'incidence. Car lorsque la lumiere est prête d'abandonner le milieu moins dense, l'autre qui lui est contigu commence à agir sur elle, & augmente sa vîtesse verticale, ainsi elle ne peut jamais être détruite dans ce passage, puisqu'elle est au contraire perpétuellement augmentée.

M. *Clairault* a renfermé toute la théorie de la réfraction dans un seul Problême; comme je ne crois pas qu'on puisse n'en ajouter à l'élégance & à la clarté de sa démonstration, je me contenterai de la donner ici.

X I.

PROBLEME.

Un corpuscule de lumiere partant du point A *avec la vîtesse connue de la lumiere, & selon une direction donnée; on suppose qu'il est attiré vers une surface* P S *par une force qui agit comme une fonction quelconque de la distance à cette surface, & on demande la courbe qu'il décrit dans ce mouvement.*

Supposant le corps arrivé en M, & ayant tiré MQ, mq perpendiculaires à SP, soient faites les lignes $MQ = x$, $PQ = y$, & nommée X la fonction de x qui exprime la force qui agit au point M. Fig. 16.

Soit de plus μm la petite ligne parcourue par le corps en vertu de la force qui le porte vers PS, pendant le petit temps dt qu'a employé la force impulsive à lui faire parcourir Mm.

Si les Qq ou les dy qui sont proportionnels au temps sont supposés constans, on aura $\mu m = ddx$, ce qui donne $X dt^2 =$

$-ddx$; car les petites fléches μm sont comme les forces multipliées par les quarrés des temps. Je mets le signe $-$ à ddx parce que la nature de la courbe est d'être concave vers son axe.

Multipliant cette équation par dx afin de l'intégrer, on aura $Xdxdt^2 = -dxddx$ ou $-2Xdxdt^2 = 2dxddx$, dont l'intégrale est $adt^2 - 2dt^2\int Xdx = dx^2$. ($adt^2$ est une constante qu'il faut ajouter dans l'intégration.) Pour chasser maintenant le dt^2 de cette équation, je supposerai que le corps décrivant la trajectoire en question, aye pour premiere vîtesse, c'est-à-dire pour celle dont il est porté lorsqu'il commence à éprouver la force X, la vîtesse f, & que l'inclinaison qu'il a dans le lieu A, d'où on le suppose parti, soit telle que le sinus de l'angle aAP soit m. On aura alors $\frac{dy}{mf} = dt$, puisque $\frac{dy}{m}$ sera dans cette supposition le premier petit côté de la trajectoire, & que l'espace divisé par la vîtesse donne le temps. Cela posé l'équation $adt^2 - 2dt^2\int Xdx = dx^2$ se changera en $\frac{ady^2}{m^2f^2} - \frac{2dy^2}{m^2f^2} \times \int Xdx = dx^2$, ou $\frac{ady^2}{m^2f^2} - \frac{2dy^2}{m^2f^2}[x] = dx^2$, en prenant $[x]$ pour représenter l'intégrale de Xdx.

De cette équation on tire $dy^2 = \dfrac{dx^2}{\frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]}$, donc

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2\left(1 + \frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]\right)}{\frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]} \quad \& \quad \frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]}.$$

On déterminera ensuite la constante a par cette condition que le sinus de l'angle Mor devienne celui de l'angle aAP, c'est-à-dire m, lorsque x ou MQ est la distance AP supposée $= b$, de laquelle distance on suppose le corps parti.

On a par ce moyen $m^2 = \frac{1}{1 + \frac{a}{m^2 f^2} - \frac{2}{m^2 f^2}[b]}$, par conſéquent $\frac{a}{m^2 f^2} = \frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2}{m^2 f^2}[b]$. Cette valeur de la conſtante $\frac{a}{m^2 f^2}$ étant ſubſtituée dans l'équation $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{m^2 f^2} - \frac{2}{m^2 f^2}[x]}}$, on aura pour l'équation de la trajectoire cherchée, $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2[b] - 2[x]}{m^2 f^2}}}$ qu'on pourra conſtruire dès que l'on connoîtra X ou la fonction de x, c'eſt-à-dire la loi de la peſanteur vers la ſurface *P S*. *C. Q. F. T.*

XII.

COROLLAIRE.

La valeur générale du ſinus de l'angle MOr qui eſt $\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ devient par la même ſubſtitution de la valeur a à ſa place, la quantité $\frac{m}{\sqrt{1 + \frac{2}{ff}[b] - \frac{2}{ff}[x]}}$, & ſi on compare le ſinus de l'angle quelconque MOr avec celui de l'angle aAP qui eſt m, on verra que leur rapport eſt exprimé par celui de 1 à $\sqrt{1 + \frac{2[b] - 2[x]}{f^2}}$; or comme ce rapport ne contient point la lettre m qui marquoit l'inclinaiſon du projectile en partant, il ſuit que quelle que ſoit cette inclinaiſon, pourvu que la viteſſe au point de départ ſoit la même, les angles que ces trajectoires font avec la perpendiculaire à la ſurface refringente, ont des ſinus qui ſont en raiſon conſtante à même diſtance de cette ſurface.

XIII.

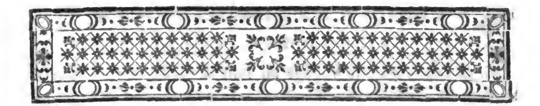
SCHOLIE.

Dans le cas de la lumiere, l'angle aAP repréſente l'angle d'incidence, & l'angle MOr devient l'angle rompu, lorſque le point O devient le point H, où la puiſſance qui infléchit le rayon ceſſe d'agir : & comme, par ce qu'on vient de trouver par le calcul, le ſinus de MOr eſt en raiſon conſtante à celui de aAP, quelſe que ſoit ſa diſtance Or, pourvu qu'elle ſoit la même dans les différens projectiles qu'on compare, cette raiſon ſera conſtante en comparant l'angle aAP où la force réfractive commence à agir, avec l'angle hHL où elle n'a plus aucun effet, c'eſt-à-dire, en comparant l'angle d'incidence avec l'angle rompu.

XIV.

On tirera très-facilement du Problême précédent l'équation de la courbe que le rayon de lumiere décrit, en ſuppoſant que l'attraction des parties du milieu refringent, agiſſe ſuivant une puiſſance quelconque n de la diſtance. Car reprenant l'équation générale $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2[b] - 2[x]}{m^2 f^2}}}$, qui exprime toutes les courbes de cette nature, ſi on veut appliquer cette ſolution générale au cas où la force X eſt le réſultat de toutes les attractions d'un corps dont toutes les particules attirent comme la puiſſance n de la diſtance, on n'aura qu'à ſubſtituer pour x la quantité $\frac{c}{r(2+m)} \times \frac{1}{mx^m}$, qu'on a trouvé pour l'attraction de ce corps (Art. 35. de la Sect. 2.) dans la ſuppoſition de $n = -3 - m$: & alors $[x]$ ou $\int X dx$ ſera $\frac{cx^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}$, par conſéquent $[b] = \frac{cb^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}$, ainſi l'équation précédente de la courbe cherchée ſera $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{mm} - 1 + \frac{2cb^{1-m} - 2cx^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}}}$.

SECTION



SECTION IV.

DE LA FIGURE DE LA TERRE.

PREMIERE PARTIE.

Où l'on traite en général de l'équilibre des fluides dans toutes sortes d'hypothèses de gravité.

I.

POur déterminer la figure de la terre, M. *Newton* ne s'est servi que de ce principe : *Que pour qu'une masse fluide soit en équilibre, il faut que le poids de deux colonnes* M C, N C *qui aboutissent de la circonférence au centre, soit égal.* Fig. 1.

M. *Hughens* a employé celui-ci : *Que pour qu'une masse fluide conservât une forme constante, il falloit que sa surface* P E p e, *fût dans chacun de ses points perpendiculaire à la direction de la pesanteur.*

M. *Bouguer* en examinant cette question, a le premier reconnu que chacun de ces principes employé séparément, étoit insuffisant pour s'assurer de l'équilibre d'une masse fluide ; il a fait voir qu'il y a une infinité de cas dans lesquels la figure que demande l'équilibre de toutes les colonnes qui vont de la surface au centre, ne seroit pas la même que celle qui suit de la perpendicularité de la direction de la pesanteur à tous les points de la surface ; mais il n'a pas examiné si une masse fluide dans laquelle ces deux principes s'accorderoient, seroit nécessairement en équilibre, ou du moins, il ne paroît pas avoir cherché d'autres principes pour s'assurer de son équilibre.

I I.

M. *Clairaut*, dont le voyage au Pole a néceſſairement tourné les vûes du côté de cette queſtion, a trouvé que ces deux principes réunis étoient encore inſuffiſans pour s'aſſurer de l'équilibre d'une maſſe fluide, au moins lorſque la réunion ne ſe fait qu'à la ſurface extérieure ; & qu'il y avoit telle hypothèſe de peſanteur où cet équilibre ſeroit impoſſible, & dans laquelle cependant la réunion de ces deux principes donneroit la même figure.

Il a donc cherché un principe par lequel on pût s'aſſurer ſi une loi de peſanteur eſt poſſible, c'eſt-à-dire, ſi l'équilibre du fluide dans lequel on la ſuppoſeroit pourroit en réſulter, & qui eût par conſéquent la généralité & la ſureté qui manque à la réunion des deux principes qu'on employoit avant lui.

Le principe qu'il a trouvé, eſt celui-ci : *Une maſſe fluide ne ſçauroit être en équilibre, que lorſque les efforts de toutes les parties compriſes dans un canal de figure quelconque, qu'on ſuppoſe traverſer cette maſſe, ſe détruiſent mutuellement.*

La maſſe entiere fluide eſt en équilibre, c'eſt-à-dire, que toutes ſes parties ſont dans un parfait repos par l'hypothèſe ; mais ſi elle eſt en équilibre, toutes les parties de tous les canaux de figure quelconque dans leſquels je puis la ſuppoſer diviſée, doivent être en repos, puiſque de tous ces canaux je puis n'en conſidérer
Fig. 1. qu'un *O R S*, & ſuppoſer que tout le reſte de la maſſe ſe durciſſe; mais les parties de ce canal *O R S* ne peuvent être en repos, que les efforts que fait le fluide pour s'échapper par *O* & par *S* ne ſoient égaux : donc ſi la maſſe entiere *P E p e* eſt en équilibre, toutes les parties du canal *O R S* feront des efforts égaux, donc ils ſe détruiront mutuellement.

I I I.

Ce principe renferme celui de M. *Hughens* & celui de M. *Newton*; & on fera voir dans la ſuite, qu'il eſt plus général, & d'une application plus ſûre, que ces deux principes réunis.

Je dis qu'il les renferme, car on voit clairement que celui de M. *Newton* y eſt renfermé, puiſque le canal *O R S* aboutit, ainſi que les deux colomnes de M. *Newton*, à deux points de la ſurface, & que par conſéquent dans toute maſſe fluide dans laquelle un canal quelconque eſt en équilibre, les colomnes tirées du centre à la circonférence ſeront de même poids, puiſque ces deux colomnes compoſent un canal qui eſt un des cas du canal quelconque *O R S*.

Il renferme auſſi le principe de M. *Hughens*; car en ſuppoſant le canal couché ſur la ſurface du fluide, en ſorte qu'il devienne le canal *F G D*, il ne ſera encore alors qu'un cas particulier du principe général qu'on vient de poſer, ainſi il devra toujours être en équilibre; mais comme dans ce cas la longueur de ce canal ne peut être déterminée, & qu'il n'y a point de raiſon ſuffiſante pour décider l'équilibre de la partie *F G* avec *G D*, plutôt qu'avec telle autre partie qu'on voudra comme *G E*, par exemple; l'équilibre de ce canal ne peut donc avoir d'autre cauſe que la perpendicularité de la direction de la peſanteur à tous ſes points, & par conſéquent à tous ceux de la ſurface, ce qui eſt le principe de M. *Hughens*.

Au lieu de conſidérer un canal aboutiſſant à la ſurface du fluide, ſuppoſons que ce canal rentre en lui-même comme *I T L K*, Fig. 1. on voit clairement que ce cas n'eſt qu'un corollaire de l'équilibre d'un canal quelconque aboutiſſant à la ſurface; car en ſuppoſant que deux points quelconques *I* & *L* de ce canal communiquent à la ſurface par les canaux *I F*, *L G*; les deux branches *I T L*, *I K L* de ce canal rentrant en lui-même, formeront, avec les deux branches *I F*, *L G*, deux canaux aboutiſſans à la ſurface par les parties communes *I F*, *L G*; or puiſque ces deux canaux aboutiſſans à la ſurface font des efforts égaux, ôtant les parties *I F*, *L G* Fig. 2. communes, les deux parties reſtantes *I T L*, *I K L* qui compoſent le canal rentrant qu'on conſidére, ſeront en équilibre.

I V.

La loi de pesanteur étant donnée, c'est un Problême déterminé que de trouver la forme que doit avoir une masse fluide, afin que le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*, soit observé ; or la loi de pesanteur étant telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même soit en équilibre, en déterminant la forme de la masse fluide par cette loi de pesanteur, & par le principe de M. *Hughens*, par exemple, puisque cette loi est telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même est en équilibre, en supposant une partie de ce canal couché sur la surface, il sera encore en équilibre, puisque ce sera toujours un canal rentrant.

Fig. 3. Mais par le principe de M. *Hughens*, la partie *O E* de ce canal couchée sur la superficie est en équilibre ; donc l'autre partie qui devient le canal *O R S*, terminé par la superficie, est aussi en équilibre ; donc la loi de pesanteur étant telle qu'un canal rentrant en lui-même soit en équilibre, on pourra toujours trouver pour le fluide, une surface telle que tous les canaux qui la traverseront seront en équilibre, ce qui est l'inverse de la proposition qu'on vient de prouver précédamment.

On voit de même, que si on avoit déterminé la figure de la surface par le principe de M. *Newton*, l'équilibre de la masse entiere, ou, ce qui revient au même, d'un canal quelconque, aboutissant d'un point de la surface à l'autre, suivroit de celui d'un canal quelconque rentrant en lui-même ; car prenant *M H N C* pour ce canal, & sçachant par l'observation du principe de M. *Newton*, que *M C N* est en repos, il suit que *M H N* y est aussi.

V.

Mais comme la terre & toutes les planettes tournent sur elles-mêmes, il faut considérer cette rotation pour pouvoir déduire leur figure des principes qu'on vient de poser.

Considérons d'abord ce qui doit arriver à deux canaux de figure

quelconque *abCB* qui tournent autour d'un axe *Pp*, & dont les extrémités *abCB* sont à des distances respectivement égales de cet axe. Fig. 4.

Supposant ces canaux partagés en une infinité de petits cylindres par des lignes paralléles, à cause de la petitesse de ces cylindres, on peut regarder les forces centrifuges comme étant les mêmes dans chacune de leurs particules ; par exemple, en *m* & en *n* ; de plus, toutes les parties du fluide tournent en même temps, ainsi la force centrifuge sera la même en *m* & en μ. Donc les forces par lesquelles le fluide renfermé dans ces petits cylindres tend à s'échapper par les extrémités *b* & β, seront égales ; Fig. 4. car la masse est comme les longueurs *mn*, $\mu\nu$, & les parties des forces acquises par la rotation dans les directions *mn* & $\mu\nu$, sont réciproquement comme ces longueurs ; or comme les canaux entiers *ab*, $\alpha\beta$ sont supposés être partagés en une infinité de ces petits cylindres, l'effort de tout le fluide renfermé dans le canal *ab* vers *b*, lequel effort vient de la rotation, est égal à l'effort de tout le fluide renfermé dans le canal $\alpha\beta$ vers β, lequel vient de même de la rotation.

D'où il suit qu'on peut faire abstraction de l'effet de la force centrifuge, quand on examine si selon une loi de gravité donnée, le fluide peut avoir une forme constante ; car en partageant le canal rentrant en lui-même *abcd* dans les deux canaux *abc*, *cda*, Fig. 5. on verra que les parties *ab*, *bc* du canal *abc*, faisant des efforts égaux en *b* par la force centrifuge, & les parties *cd*, *ad* du canal *adc*, faisant aussi des efforts égaux vers *d* en vertu de leur force centrifuge, la rotation ne changera rien à l'équilibre du canal *abcd* rentrant en lui-même ; donc on peut faire abstraction de la force centrifuge en considérant l'équilibre d'un tel canal, & par conséquent celui de toute la masse fluide qui en résulte.

V I.

On a considéré jusqu'à présent l'équilibre d'un canal de figure

quelconque rentrant en lui-même, & on a fait voir que de l'équilibre de ce canal, suivoit celui de la masse fluide entiere; pour simplifier cette démonstration & l'appliquer plus facilement aux planettes, il faut faire ensorte de n'avoir à considérer que l'équilibre d'un canal placé dans le plan d'un méridien du sphéroide, & d'en tirer l'équilibre d'un canal de figure quelconque rentrant en lui-même; car il est certain qu'alors la question sera simplifiée, & plus aisée à traiter.

Fig. 6. Commençons par considérer deux canaux *HI*, *KL* remplis d'un même fluide, & terminés par deux paralléles à l'équateur, & supposons-les placés sur la même surface de circonvolution *AFGB*, les poids de ces deux canaux seront les mêmes: car la pesanteur étant supposée la même dans tous les points d'un paralléle à l'équateur, un corps qui seroit placé en *M* & qui ne pourroit sortir de la surface *ABFG*, ne pourroit prendre d'autre direction que celle du méridien *Mr*, puisque ce méridien est la commune section du plan dans lequel se fait la gravité, & de la surface de circonvolution qu'on considére.

Supposons les deux canaux *HI*, *KL* partagés en une infinité de petits cylindres égaux *Nn*, *Mm*, coupés par des plans paralléles à l'équateur, les forces qui agiront sur ces petits cylindres seront égales, & dans la direction *Mr*, *Ns*, ces forces *Mr*, *Ns*, peuvent être décomposées dans deux forces, dont l'une seroit dans les directions *Mm*, *Nn* du fluide, & l'autre leur seroit perpendiculaire; les forces perpendiculaires à *Mm*, & à *Nn*, n'imprimeront aucun mouvement au fluide renfermé dans ces canaux, les forces restantes *Mm*, *Nn* seront en raison renversée des longueurs *Mm*, *Nn*; mais les masses sont comme ces longueurs: donc les poids de *Mm*, & de *Nn* seront égaux; donc les poids entiers des canaux *HI*, *KL* seront égaux entr'eux; donc le canal *AB* & le canal *HI*, seront du même poids.

Or, puisqu'on a réduit ci-dessus l'équilibre d'une masse fluide à celui d'un canal de figure quelconque rentrant en lui-même,

il ſuit, de ce qu'on vient de dire, que ce même équilibre ſe réduit à celui d'un canal rentrant *AQBX*, & placé dans le plan d'un méridien ; car tout canal *HOIV* à double courbure, peut être conſidéré comme compoſé des deux branches *HOI*, *HVI*, & chacune de ſes branches eſt de même poids reſpectivement, par ce qui vient d'être dit, que les branches *AQB*, *AXB* du canal *AQBX* puiſque les branches ſeront les communes ſections du méridien, & des ſurfaces de révolution qui paſſent par les branches à double courbure *HOI*, *HVI* ; donc ſi on a reconnu que *AQBX* eſt en équilibre, on verra que *HOVI* y ſera auſſi ; donc pour qu'un ſphéroïde ſoit en équilibre, il ſuffit qu'un canal quelconque placé dans le plan du méridien de ce ſphéroïde ſoit en équilibre, en ne conſidérant que la ſeule force de la gravité ; car on vient de faire voir qu'on peut faire abſtraction de la force centrifuge.

On tirera de ce principe la méthode générale de déterminer toutes les hypothèſes de peſanteur dans leſquelles un fluide peut être en équilibre ; mais on va examiner auparavant celles de ces hypothèſes, dont on ſe ſert ordinairement, parce qu'elles n'ont beſoin que de ce qui précéde pour être traitées.

VII.

PREMIERE HYPOTHESE.

Lorſque les parties du fluide ne tendent que vers un ſeul centre.

On a vu qu'une maſſe fluide pourra avoir une forme permanente, ſi un canal quelconque rentrant en lui-même eſt en équilibre dans cette maſſe : ſuppoſons donc un tel canal comme *BMNA*, & que de plus, la gravité ne dépende que de la diſtance au centre ; ſi du centre de tendance *C* on décrit une infinité d'arcs tels que *MN*, *mn*, ce canal ſera alors compoſé de deux branches *BMA*, *BNA* qui auront chacune le même nombre de cylindres *Mm*, *Nn* ; mais comme on ſuppoſe que Fig. 7.

la gravité ne dépend que de la diſtance, & que par conſéquent elle eſt la même en *M* & en *N*, & que de plus les petits cylindres *Mm*, *Nn* ont la même hauteur, il ſuit que les poids de ces cylindres ſont égaux ; donc les deux branches *BMA*, *BNA* auront des poids égaux, puiſqu'elles ſont compoſées d'un même nombre de ces cylindres ; donc le canal entier *BMNA* ſera en équilibre ; donc on n'aura qu'à déterminer la ſurface du ſphéroïde par le principe de M. *Newton*, ou par celui de M. *Hughens*, & l'on ſera ſûr que toute la maſſe fluide qui compoſe ce ſphéroïde, ſera dans un parfait repos.

VIII.

SECONDE HYPOTHESE.

Lorſque les parties du fluide tendent vers pluſieurs centres.

Fig. 8. Suppoſant un torrent de matiere fluide qui tourne autour d'un axe, & chaque particule de ce torrent pouſſée par deux forces, (ce qui eſt l'hypothèſe de M. de *Maupertuis*, pour expliquer la formation de l'anneau de Saturne) : que l'une de ces forces tende au centre placé hors du torrent, & l'autre au centre placé dans l'intérieur ; ces deux centres étant dans le plan d'un même méridien, on prouvera de même, que la peſanteur ne dépendant que de la diſtance au centre, la maſſe fluide doit être en équilibre ; car partageant le canal rentrant *BQMA* comme dans la premiere hypothéſe, en une infinité d'élémens par des cercles décrits du centre *C*, on aura deux branches de ce canal qui contiendront le même nombre de ſes élémens, & qui par conſéquent feront en équilibre ; le partageant encore en une infinité d'autres élémens par des cercles décrits du centre γ, il ſera encore partagé en deux branches qui contiendront le même nombre d'élémens, & dont par conſéquent les efforts ſe contre-balanceront ; donc le canal entier ſera en équilibre en vertu de ces deux forces, comme il y ſeroit par une ſeule, & ſi la figure annulaire ou ſphéroïdale

que

que doit prendre ce torrent, a été déterminée par l'un des deux principes ordinaires, toutes ses parties ayant cette double tendance seront en équilibre.

On sent que ce seroit la même chose, si on supposoit dans chaque méridien un nombre quelconque de centres de forces, au lieu d'en supposer deux.

I X.

TROISIÉME HYPOTHESE.

Lorsque la gravité est le résultat de l'attraction de toutes les parties d'un corps central de figure quelconque.

Si l'on considére la figure du corps central, c'est-à-dire, si au lieu de supposer, comme on a fait jusqu'à présent, chaque corps central comme un point, & n'agissant que dans le plan du méridien où il est placé, (ainsi que dans l'hypothèse de M. de *Maupertuis* pour la formation des anneaux) on suppose que la gravité de chaque particule du torrent, ou de la matiere destinée à former un sphéroïde, soit le résultat des attractions exercées sur elle en tout sens par toutes les parties du corps qui lui sert de centre, on détermineroit l'équilibre de la masse fluide, en considérant chaque partie du corps central qui attire comme un centre de tendance; or, on vient de voir que chacun de ces centres exercera sur chaque particule, des attractions dont les efforts se contre-balanceront dans la masse totale; donc les efforts de toutes les parties de ce corps central se contre-balanceront; donc la masse totale sera en équilibre.

Mais pour déterminer dans cette hypothèse de pesanteur la figure que doit prendre la matiere fluide, il faudroit employer un calcul plus difficile que celui que demandent les hypothèses dont on vient de parler, parce que chaque particule du corps central agit dans un méridien différent : ainsi il faudroit commencer par calculer la somme de toutes les attractions du corps

central dont la forme eſt ſuppoſée donnée, ſur un corpuſcule placé hors de lui.

Ce Problême qui dépend des quadratures étant réſolu, on déterminera aiſément la figure du ſphéroïde de l'anneau, en employant le principe de M. *Hughens*.

On a ſuppoſé le corps central de figure quelconque, parce qu'on s'aſſurera de même de l'équilibre des parties de l'anneau ou du ſphéroïde, ſoit que la peſanteur ſoit le réſultat de l'attraction de toutes les parties d'un cercle, ou d'un noyau ſolide qui ait la forme d'un ſphéroïde, ou celle d'un anneau.

X.

QUATRIÉME HYPOTHESE.

Lorſque la peſanteur eſt l'effet de l'attraction de toutes les parties du ſphéroïde ou de l'anneau.

On a eu égard dans cette hypothèſe, non ſeulement à l'attraction de toutes les parties du corps central ſuppoſé de figure quelconque, mais encore à celle de toutes les parties du fluide même dont on cherche la figure ; dans ce cas, la détermination de la forme que la maſſe doit prendre, eſt infiniment plus difficile ; car alors la loi de la gravité dépend de la courbe qu'on cherche ; mais on voit qu'il exiſte une courbe, telle que l'attraction du ſolide qu'elle forme, jointe à celle du noyau, produit une gravité, qui, combinée avec la force centrifuge, donne pour force compoſée une force dont la direction eſt perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde ou de l'anneau : prenant donc cette courbe pour donnée, on verra alors la néceſſité de l'équilibre dans ce ſphéroïde ou dans cet anneau, par la même raiſon par laquelle on a vu que le ſphéroïde ou l'anneau dans lequel la peſanteur ne réſulte que de l'attraction des parties du noyau, doit être en équilibre.

X I.

CINQUIÉME HYPOTHESE.

Lorsque la gravité ne résulte que de l'attraction des parties du fluide même, sans considérer celle du noyau.

On voit encore de même, que si la gravité étoit le résultat des attractions de la masse fluide seulement, il se formeroit toujours un sphéroïde dont toutes les parties seroient en équilibre, & on pourroit le déterminer en employant le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*.

Dans cette hypothèse on ne voit pas avec la même facilité, qu'il peut se former un anneau qui n'eut point d'anneau intérieur solide ; il paroît même très-vraisemblable qu'un tel anneau qui entoureroit un corps central, n'arriveroit à l'équilibre que lorsque toutes ses parties seroient tombées sur le corps central avec lequel il ne feroit plus qu'une planette.

X I I.

SIXIÉME HYPOTHESE.

Lorsque le noyau solide est composé de couches de densités différentes.

On ne se serviroit pour s'assurer de l'équilibre du sphéroïde dans cette hypothèse, que des principes ci-dessus employés ; on détermineroit l'attraction de chacune de ces couches, & ayant déterminé la loi que suivroit la gravité totale par l'opération de calcul intégral qui donne la somme des attractions de toutes ces différentes couches, on trouveroit la figure cherchée en employant le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*.

X I I I.

Si en supposant l'attraction de toutes les parties d'une masse fluide ou d'une planette, on suppose sa figure donnée, on pourra

trouver pour le noyau ſolide, une figure & une denſité telles que la figure donnée pour la maſſe entiere ſoit celle de l'équilibre, c'eſt-à-dire, que dans cette hypothèſe on peut expliquer comment une planette allongée ou applatie d'une maniere quelconque pourroit être en équilibre.

Fig. 9. Car on voit aiſément qu'on peut trouver un ſphéroïde *KLkl* tel que ſon attraction, étant ajoutée à celle de la matiere renfermée entre le ſphéroïde donné *PEpe* & le cherché *KLkl*, produiſe, étant combinée avec la force centrifuge, une force dont la direction ſoit perpendiculaire à la ſurface *PEpe*; or la courbe *KLkl* étant connue, on ſçait, par tout ce qu'on a dit précédemment, que toutes les parties du fluide qui l'entoure ſeront en équilibre.

XIV.

Ce raiſonnement ne ſuffit pas pour faire voir qu'il ſeroit poſſible que la terre eût une figure donnée, allongée, par exemple; car après avoir trouvé la figure du noyau d'où réſulteroit l'allongement ſuppoſé, il faudroit encore faire voir que cette hypothèſe s'accorderoit avec les phénoménes qu'on connoît, comme, par exemple, celui du raccourciſſement du pendule en allant du nord au ſud; ainſi quand même les meſures qu'on vient de prendre au nord & ſous l'équateur, n'auroient pas appris que les dégrés vont en augmentant du ſud au nord, le raiſonnement précédent ne pourroit ſuffire ſeul pour admettre la poſſibilité de la figure allongée de la terre, comme il ſuffiroit pour admettre cette poſſibilité dans les autres planettes qui nous ſont moins connues; ainſi dans ce cas nos connoiſſances s'oppoſent à nos concluſions, & c'eſt ordinairement l'effet qu'elles ſont dans les ſciences qui ne peuvent s'éclairer du flambeau de la Géométrie.

XV.

Après avoir fait voir que le principe de M. *Clairaut* ſuffit pour

s'aſſurer de l'équilibre d'une maſſe fluide dans toutes les hypothèſes de peſanteur, il faut faire voir que les principes qu'on a employés juſqu'à préſent n'avoient pas cet avantage, & qu'il y a telle loi de peſanteur dans laquelle une maſſe fluide ne prendroit jamais une forme conſtante, quoique le principe de M. *Hughens*, & celui de M. *Newton*, s'accordaſſent à lui donner la même figure.

L'hypothèſe dans laquelle la loi de peſanteur ſeroit telle que la gravité dépendroit de la diſtance au centre, & de quelqu'autre quantité, comme de l'angle du rayon & de l'axe, ou bien de, &c. ſeroit du nombre de celles où il y auroit un mouvement continuel dans les parties du fluide.

Car ſi on ſuppoſe dans le ſphéroïde *P E p e*, un canal *a b d c* compoſé de deux arcs de cercles terminés par les deux petits cylindres *a c*, *b d*, dirigés vers le centre *c*, d'où on a tracé les arcs, on verra aiſément que la gravité étant perpendiculaire aux deux branches circulaires, elle ne donnera aucun mouvement aux parties qui les compoſent; donc pour qu'il y ait équilibre, il ſuffira que les efforts des deux petits cylindres qui les terminent ſoient les mêmes: mais il faudroit pour cela que la peſanteur fut la même en *a* & en *b*, ce qui eſt contre l'hypothèſe de la loi que nous examinons, puiſqu'on l'a ſuppoſée différente à des diſtances égales; donc on peut conclure que dans toutes les hypothèſes où la gravité dépendroit de la tendance vers un centre, & non pas uniquement de la diſtance à ce centre, il y auroit un mouvement perpétuel dans les parties du fluide. Fig. 10.

Or dans ces hypothèſes l'équilibre des colomnes, & la perpendicularité de la direction de la peſanteur à la ſurface, pourroient s'accorder à donner la même figure au ſphéroïde, & jetteroient par conſéquent dans l'erreur ceux qui feroient dépendre la poſſibilité de l'équilibre de l'accord de ces deux principes; car ſoit *P M E* un ſphéroïde dont le centre ſoit *C*, ſuppoſant que *E K* exprime la force centrifuge en *E*, & prenant *M G* : *E K* :: Fig. 11.

QM : *CE*, *MG* exprimera la force centrifuge en *M*; ainſi tirant le rayon *MC* & la ligne *MH* perpendiculaire en *M* à la courbe, qu'on méne par le point *G* la ligne *GH* parallèle à *MC*, & qu'on achéve le parallélogramme *MGHI*, la ligne *MI* exprimera la force centrale en *M* telle que le principe de M. *Hughens* la demande, pour que le ſphéroïde *PME* ſoit en équilibre ; or, on a vu que dans l'hypothèſe d'une peſanteur qui ne dépend que de la diſtance au centre, les deux principes s'accordent à donner une forme conſtante au fluide ; ſuppoſant donc qu'on ait calculé la peſanteur à tous les points *M* du ſphéroïde *EM*, on verra que ſi la peſanteur dépend, en allant de chaque point *M* de la circonférence vers *c*, de quelqu'autre quantité que de la diſtance, on pourra trouver une infinité de loix différentes de peſanteur qui donneront une même quantité pour le poids des colomnes *MC*; donc toutes ces colomnes *MC* qui étoient en équilibre dans la premiere ſuppoſition d'une gravité dépendante ſeulement de la diſtance au centre, y ſeront encore dans pluſieurs des cas où la gravité dépendroit de la diſtance, & de quelqu'autre quantité : cependant on ſçait, par ce qui vient d'être dit, qu'une telle loi de peſanteur ne donneroit jamais d'équilibre à la maſſe entiere du fluide ; donc l'accord de ces deux principes ne peut ſuffire pour s'aſſurer de la poſſibilité d'une loi de peſanteur.

XVI.

Dans tout ce qui précéde pour appliquer les loix de l'hydroſtatique à la détermination de la figure de la terre, on a été obligé de ſuppoſer la matiere qui la compoſe entierement homogéne, ce qui peut n'être pas ; il faut donc examiner ce qui ſeroit néceſſaire pour que les parties d'un ſphéroïde compoſé de différens fluides qui ne peuvent ſe mêler fuſſent en équilibre ; or dans une telle maſſe il faudroit que tous les points de toutes les ſurfaces qui terminent les différens fluides, fuſſent perpendiculaires à la direction de la peſanteur comme celle qui termine le fluide ſupérieur.

On voit d'abord que tous les points de la furface extérieure doivent être perpendiculaires à la direction de la pefanteur, puifque ce fphéroïde, pour être compofé de fluides de différentes denfités, n'en eft pas moins dans le cas général d'une maffe fluide quelconque qu'on fçait ne pouvoir être en équilibre fans que la direction de la pefanteur foit perpendiculaire à tous les points de fa furface.

Pour faire voir à préfent que les furfaces intérieures qui terminent les différens fluides doivent auffi avoir cette condition, fuppofons un canal *O Q R S* dont les points *O* & *S* fe terminent à la furface extérieure, & les points *Q* & *R* à la même furface intérieure fur laquelle la branche *Q R* foit couchée. Ce canal eft en équilibre parce que la branche *Q R* ne pefe point, car fi elle pefoit, il eft clair que ce canal *O Q R S* qui eft en équilibre lorfque cette branche *Q R* eft dans la couche *Q N H* que je fuppofe de vif argent, par exemple, n'y feroit plus, fi *Q R* étoit dans la couche *L T G* que je fuppofe d'eau. Donc fi la direction n'eft pas perpendiculaire à tous les points de la furface *Q R H K*, elle preffera plus vers *Q* ou vers *R*; donc le canal *O Q R S* ne fera plus en équilibre, mais le fluide qui y eft contenu s'échappera vers *O* ou vers *S*, felon que le canal *R Q* pefera plus vers *Q* ou vers *R*, afin que le fphéroïde entier puiffe être en équilibre; il faut donc que la pefanteur foit perpendiculaire à tous les points de la furface interne *Q R H K* : on fera le même raifonnement fur toutes les furfaces qui féparent les différens fluides. Fig. 12.

Mais cette confidération nouvelle ne rendra pas la détermination de la forme que doit prendre une maffe fluide quelconque plus embarraffante ni plus compliquée, lorfque la pefanteur ne dépendra point de la forme de la planette, & il eft aifé de faire voir que l'équilibre des planettes hétérogénes dépend des mêmes loix de pefanteur que celui des planettes homogénes ; car dans les planettes hétérogénes les canaux rentrans en eux-mêmes & contenus dans une même couche feront en équilibre, puifqu'ils

feront dans le même cas des canaux rentrans d'une sphére homogéne ; donc les canaux *GHLK* terminés par les deux surfaces d'une même couche, sont de même poids ; or, si les poids des tuyaux *FG*, *ML*, *GK*, *HL*, &c. sont respectivement égaux, un canal quelconque *FGKHLM* qui traversera tant de fluides qu'on voudra, sera toujours en équilibre ; ainsi la loi de pesanteur étant donnée, si on veut voir la forme que doit prendre une masse composée de fluides hétérogénes, il suffira de calculer par les principes ci-dessus donnés la figure que la même masse auroit en la supposant homogéne.

XVII.

Mais si on vouloit avoir la figure *HKR* de la surface qui sépare deux fluides quelconques de la planette dans l'hypothèse de l'attraction, on ne trouveroit pas la même forme pour une planette hétérogéne & pour une planette homogéne, car alors la loi de pesanteur feroit différente.

Si on vouloit chercher la figure *KHR* d'une surface interne qui sépare deux fluides quelconques, il suffiroit, la loi de pesanteur étant donnée, de faire abstraction de toute la matiere supérieure à cette surface, & chercher ensuite la figure de la masse fluide restante, comme si elle étoit seule.

Mais dans l'hypothèse où la pesanteur est produite par l'attraction mutuelle de toutes les parties de la matiere, on ne pourroit plus faire abstraction de la couche supérieure ; car l'attraction de cette couche doit entrer dans l'expression de la pesanteur des parties de la masse restante.

XVIII.

Sans connoître la forme d'un sphéroïde hétérogéne dans cette hypothèse de l'attraction mutuelle des parties de la matiere, c'est-à-dire, sans avoir déterminé la loi de pesanteur qui en résulte, on peut s'assurer que cette loi est une de celles dans lesquelles une masse fluide peut prendre une forme constante.

Car

Car il feroit aifé de voir par les raifons déja employées à l'égard des planettes homogénes, que les canaux rentrans en eux-mêmes, qui feroient renfermés dans une couche quelconque d'un même fluide, feroient en équilibre ; or, donnant à ces canaux une figure *LHGK* compofée de deux branches *LG*, *HK* qui joignent deux arcs *GK*, *HL* placés fur les deux furfaces extérieures de la couche, lefquelles auroient été déterminées par cette condition, que la gravité en chacun de leurs points feroit perpendiculaire au plan tangent de la furface en ce point, il eft clair que les branches *GK*, *HL* feroient néceffairement de même poids ; & comme on verroit de la même maniere que les branches *FG*, *ML*, *HVK* qu'il faudroit ajouter à ces premieres *GK*, *HK* pour former un canal qui traversât tant de couches que l'on voudroit du fluide, & qui aboutit à deux points de la furface extérieure du fphéroïde, feroient encore en équilibre, on en concluroit néceffairement que tous les canaux menés à volonté d'un point de la furface du fphéroïde à l'autre, feroient en repos, & par conféquent le fphéroïde entier.

XIX.

Ce qu'on vient de dire fur l'équilibre des planettes hétérogénes, fait voir l'erreur où font tombés quelques auteurs, lefquels pour diminuer la grandeur du rayon de l'équateur que donnent les loix de l'hydroftatique, ont fuppofé que les colomnes des fluides du centre à la furface font d'autant plus denfes, qu'elles font plus près de l'équateur ; car on fçait que deux fluides de denfité inégale ne peuvent être dans la même couche, & que de plus ils doivent fe placer de maniere que le plus pefant foit le plus proche du centre ; & on vient de voir qu'il faut que la furface qui les fépare ait tous fes points perpendiculaires à la direction de la pefanteur, conditions qui s'oppofent toutes à la fuppofition de ces auteurs.

X X.

Fig. 13. J'ai dit, Art. 7. que pour sçavoir si une hypothèse de gravité étoit propre à donner l'équilibre à une masse fluide *E M P*, il suffisoit d'examiner si un canal quelconque *O S N K* rentrant en lui-même, & placé dans le plan *E C P* du méridien de cette masse fluide, étoit en équilibre lui-même, ou, ce qui revient au même, si le fluide renfermé dans un canal de courbure quelconque *O N* qui aboutit à deux points pris à volonté *O*, & *N*, fait le même effort pour sortir vers *O* ou vers *N* que le fluide renfermé dans tout autre canal *O K N* qui aboutiroit aux mêmes points *O*, *N*. Pour faire voir l'usage de ce principe, non seulement pour décider la possibilité de l'équilibre des fluides dans les hypothèses de pesanteur dépendantes de l'attraction, telles que celles que je viens de considérer, mais encore dans toutes sortes d'autres hypothèses de gravité, je considérerai la question plus en général de la maniere suivante.

Ayant abaissé d'un point *S* & du point *s* qui en est infiniment près, les ordonnées *S H*, *s h* à la courbe *O N*, soient faites $CH = x$, $HS = y$, $Sr = dx$, $sr = dy$, $Ss = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; soient ensuite décomposées toutes les différentes espéces de forces qu'on suppose agir sur les particules du fluide proposé en deux directions, les unes suivant *S H* perpendiculaires à l'axe *C P*, & les autres suivant la paralléle à ce même axe; & soit pris *P* pour désigner la somme de toutes les forces qui agissent suivant *S H*, & *Q* pour désigner la somme de celles qui agissent dans la direction paralléles à *C P*.

Si l'on décompose ensuite la force *P* pour avoir la partie de cette force qui agit dans la direction *S s* qui est celle du canal, on verra que la partie de cette force avec laquelle le fluide placé en *S s* fait effort pour sortir de ce canal, soit vers *H*, soit vers *O*, doit être $\frac{P\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; on verra de même que la partie de

la force Q qui agit ſuivant la même direction doit être $\frac{Q\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, enſorte que leur ſomme, ou la force totale qui ſollicite le fluide placé en S à ſortir vers O ou vers N, doit être $\frac{P\,dy + Q\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; multipliant donc cette force par la particule Ss ou $\sqrt{dx^2+dy^2}$ qu'elle anime, on aura $P\,dy + Q\,dx$ pour le poids de Ss, c'eſt-à-dire, pour l'effort que fait cette particule pour ſortir vers l'une des extrémités du canal ON; donc l'intégrale de $P\,dy + Q\,dx$ qu'on auroit commencé par completter par cette condition qu'elle ſoit nulle lorſqu'on fait $x = CG$ qui eſt l'abſciſſe qui répond au commencement O du canal, & dans laquelle on auroit enſuite égalé x à CI (qui eſt l'abſciſſe qui répond à l'extrémité N du même canal,) cette intégrale, dis-je, devroit donner une quantité qui fut toujours la même, quelque fut la courbure ON.

Il faut donc pour que l'équilibre des fluides ſoit poſſible dans une hypothèſe de peſanteur, que les forces P & Q qui réſultent de cette hypothèſe ſoient telles, que la quantité $P\,dy + Q\,dx$ puiſſe s'intégrer ſans connoître la relation de x à y; ainſi $P\,dy + Q\,dx$ doit être en ce cas de ces ſortes de différentielles que M. *Clairaut* a appellé *Complettes* dans un Mémoire qu'il a donné à l'Académie, & qui ſe trouve dans le Volume de 1740. *p.* 294.

XXI.

$x\,dx + y\,dy$, $x\,dy + y\,dx$, $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$ ſont de ces ſortes de différentielles, parce qu'elles ont pour intégrales des fonctions de x & de y, qui ne dépendent d'aucune relation entre x & y, $y\,dx - x\,dy$, $yy\,dx + xx\,dy$ ne ſont point de telles différentielles, parce qu'il n'y a aucune fonction de x & de y qui en puiſſe être les intégrales.

M. *Clairaut* a donné dans le Mémoire que je viens de citer, un Théoréme pour diſtinguer ces différentielles intégrales par

quelque fonction de x & de y ; il a fait voir que si la différentielle de P prise en faisant y constante & x variable, se trouvoit, après avoir été divisée par dx, égale à la quantité qui viendroit en divisant par dy, la différentielle de Q prise en faisant x constant & y variable ; la différentielle $Pdy + Qdx$ avoit toujours pour intégrale une fonction de x & de y indépendante de toute relation entre x & y.

XXII.

Fig. 14. Pour donner une application de cette méthode, supposons qu'on ait choisi, pour hypothèse de gravité, celle dans laquelle les particules s d'une masse fluide qui tourneroit autour de son axe CP tendroient toutes vers le centre C par une force qui agiroit en raison composée de la raison renversée du quarré des distances CS au centre, & de la raison directe du sinus de l'angle SCH: faisant les lignes $CH = x$. $HS = y$, la force qui anime chaque particule S feroit donc une force poussant vers C, & exprimée par $\frac{y}{\sqrt{xx+yy}} \times \frac{1}{xx+yy}$, puisque $\frac{y}{\sqrt{xx+yy}}$ est le sinus de l'angle que feroit avec l'axe CP la ligne tirée de S au centre C.

Décomposant donc la force proposée $\frac{y}{xx+yy^{\frac{3}{2}}}$ suivant la direction SH & la parallèle à HC, on aura $\frac{yy}{(xx+yy)^2}$ pour la force exprimée par P & $\frac{yx}{(xx+yy)^2}$ pour celle exprimée par Q, & par ce qu'on vient de dire, l'équilibre du fluide dans cette hypothèse demande que $\frac{yydy+yxdx}{(xx+yy)^2}$ soit une différentielle complette, c'est-à-dire, qu'elle ait pour intégrale quelque fonction de x & de y indépendante de la relation de x à y.

Pour s'en aſſurer il faut différencier P ou $\frac{yy}{(xx+yy)^2}$ en regardant y comme conſtante, il viendra pour la différentielle $-\frac{2xyydx}{(xx+yy)^3}$, qui étant diviſée par dx donne $-\frac{2xyy}{(xx+yy)^3}$, différenciant de même Q ou $\frac{xy}{(xx+yy)^2}$ & faiſant x conſtante, il viendra la différentielle $\frac{x^3dy-xyydy}{(xx+yy)^3}$, qui étant diviſée par dy donne $\frac{x^3-xyy}{(xx+yy)^3}$; maintenant on voit que la quantité $-\frac{2xy^2}{(xx+yy)^3}$ venue par la premiere opération, n'eſt point la même que $\frac{x^3-xyy}{(xx+yy)^3}$ venue par la ſeconde; donc la différentielle propoſée n'eſt point intégrale en général, c'eſt-à-dire, quelle que ſoit la relation de x à y; donc l'hypothèſe de gravité qui a donné cette différentielle, eſt de celle dans leſquelles les fluides ne ſeroient point en équilibre.

XXIII.

Pour donner un exemple d'une hypothèſe qui réuſſiſſe, imaginons que les particules du fluide ſoient animées par des forces qui les faſſent tendre à deux centres A & B placés dans l'axe de révolution : la premiere de ces forces agiſſant comme une puiſſance quelconque m de la diſtance AS, & la ſeconde comme une puiſſance quelconque n de la diſtance BS. Je commence par faire les lignes $HS=y$. $CA=a$. $CH=x$. $BC=b$. $AH=x-a$. $AS=\sqrt{\overline{x-a}^2+yy}$. $BH=b+x$. $BS=\sqrt{\overline{b+x}^2+yy}$. la force par laquelle la particule S tendra vers A ſera donc $A\times AS^m$, ou $A\left(\overline{a-x}^2+yy\right)^{\frac{m}{2}}$, & la force par laquelle cette même particule S tendra vers B, ſera exprimée par $B\times BS^n$, ou $B\left(\overline{b-x}^2+yy\right)^{\frac{n}{2}}$, CH & HS Fig. 15.

étant les coordonnées répondantes au point S, CA & CB, les droites qui marquent la position des points attractifs A & B par rapport à l'origine de x.

Il est évident que la force P trouvée en décomposant les forces des points A & B suivant SH, sera $A\,(AS)^m \times \frac{HS}{AS} + B\,(BS)^n \times \frac{HS}{BS}$, c'est-à-dire, en termes analytiques $Ay\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-1}{2}} + By\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-1}{2}}$. La force Q se trouvera de même exprimée par $A \times \overline{x-a}\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-1}{2}} + B \times \overline{b+x}\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-1}{2}}$; différenciant maintenant P ou $Ay\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-1}{2}} + By\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-1}{2}}$, & faisant y constante & divisant par dx la différentielle venue, on aura $A \times \overline{m-1}\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-3}{2}} \times y \times \overline{x-a} + B \times \overline{n-1}\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-3}{2}} \times y \times \overline{b+x}$.

Différenciant de même Q ou $A \times \overline{x-a}\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-1}{2}} + B \times \overline{b+x}\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-1}{2}}$ en supposant x constant, & divisant la différentielle par dy, on aura $A \times \overline{x-a} \times \overline{m-1}\, y\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-3}{2}} + B \times \overline{b+x} \times \overline{n-1}\, y\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-3}{2}}$; or cette quantité étant visiblement la même que celle qu'on a eu en différenciant P; cette différentielle $Pdy + Qdx$, est une différentielle complette dans cette hypothèse, & l'équilibre y est possible.

Au reste, sans prendre la peine de différencier P & Q, on pouvoit reconnoître facilement que la différentielle proposée, $Aydy\,(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m-1}{2}} + Bydy\,(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n-1}{2}}$, étoit complette : car son intégrale se trouve tout de suite, & est

$$\frac{A}{m+1}\left(\overline{x-a}^2+yy\right)^{\frac{m+1}{2}}+\frac{B}{n+1}\left(\overline{b+x}^2+yy\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

& je n'ai donné la maniere de reconnoître la possibilité de son intégration par l'opération précédente, que pour mieux faire voir l'usage du Théoréme de M. *Clairaut* dans d'autres cas où il seroit peut-être si difficile d'intégrer, qu'on abandonneroit l'intégration sans sçavoir si elle possible ou non.

XXIV.

Aprés avoir reconnu qu'une hypothèse de gravité n'a rien de contraire à l'équilibre des fluides, on trouvera de la maniere suivante la figure que doit avoir, dans cette hypothèse, une planette dont le temps de la rotation est donné.

Soit imaginé que le canal *O N* est prolongé d'une part jusqu'au centre *C*, & de l'autre jusqu'à la surface *M*, il est évident, par ce qu'on vient de dire, que l'intégrale de $P\,dy + Q\,dx$ étant complettée par cette condition, qu'elle disparoisse quand y & $x = o$, on n'aura qu'à retrancher de cette intégrale, laquelle exprime le poids total du canal *C O M* (en supposant que x & y soient les coordonnées *C Q* & *Q M* du méridien) la somme des efforts centrifuges des parties de *C M*, & faire la différence égale à une constante. Fig. 13.

Comme la somme des efforts centrifuges de *C M* doit être, par ce qu'on a vû, la même que celle des efforts d'un canal *Q M* placé dans le sens de l'ordonnée, la question est réduite à sommer les efforts de *Q M*.

Soit donc nommée f la force centrifuge produite à la distance r par la rotation du sphéroïde, on aura $\frac{fy}{r}$ pour la force centrifuge à une distance quelconque y, & $\frac{fydy}{r}$ pour l'effort centrifuge de la particule dy; intégrant donc cette différentielle, on aura $\frac{fyy}{2r}$ pour l'effort centrifuge total des parties de *Q M*

ou de CM ; donc $\int(Pdy + Qdx) - \frac{fyy}{2r}$ étant égale à une conſtante, donnera l'équation cherchée du méridien de la planette dans l'hypothèſe, où la peſanteur décompoſée ſuivant les deux axes a donné les forces P & Q.

Ainſi dans l'hypothèſe que je viens de prendre d'une gravité produite par la tendance à deux points A & B, la différentielle $Pdy + Qdx$ ayant donné pour ſon intégrale $\frac{A}{m+1}(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n+1}{2}}$, l'équation du ſphéroïde dans cette hypothèſe, doit être $\frac{A}{m+1}(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, ($\frac{fyy}{2r}$ étant la ſomme de la force centrifuge ſur une colomne comme y, & C étant une conſtante qu'on ſuppoſe égale au poids des colomnes quelconques qui vont du centre à la ſurface.)

Si on ſuppoſe les centres attractifs A & B réunis, & qu'on prenne les origines des x de ce centre, l'équation précédente feroit, en ce cas, $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$ qui exprime la figure d'une planette dans l'hypothèſe que ſes parties peſent vers un centre ſuivant une force compoſée de la ſomme de deux puiſſances différentes de la diſtance, cette force étant alors $Ad^m + Bd^n$, (d exprimant la diſtance des particules au centre attractif.)

X X V.

Pour montrer la maniere dont on doit faire uſage de l'équation générale précédente dans des applications aux cas qui ont lieu

lieu dans la nature, je vais montrer comment on doit déterminer les coëficiens de l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$ dans le cas où le sphéroïde est la terre, en supposant que la gravité y fut produite par une tendance vers un centre exprimée par $Ad^m + Bd^n$.

Supposant que le demi axe de révolution soit donné, & qu'il soit égal à t, je substitue cette valeur pour x dans l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, je fais en même temps $y = o$ dans cette même équation, parce que l'ordonnée doit être au pole, & il me vient alors $\frac{A}{m+1}t^{m+1} + \frac{B}{n+1}t^{n+1} = C$, ce qui détermine la constante C.

Je suppose ensuite que r soit le rayon de l'équateur, & je prends φ pour exprimer le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, & dans le cas où le sphéroïde est la terre, $\varphi = \frac{1}{288}$ à peu près : comme dans l'hypothèse qu'on examine ici, la gravité à l'équateur, c'est-à-dire à la distance r, doit être $Ar^m + Br^n$; j'ai donc $\varphi Ar^m + \varphi Br^n$ à substituer à f (ces quantités exprimant la force centrifuge absolue) ; je fais donc cette substitution dans l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, & j'ai $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\varphi Ar^{m-1} + \frac{1}{2}\varphi Br^{n-1}\right) yy = \frac{A}{m+1}t^{m+1} + \frac{B}{n+1}t^{n+1}$; pour déterminer ensuite le rapport de t à r je fais $x = o$, & $y = r$, car lorsque l'abscisse est nulle l'ordonnée devient le rayon de l'équateur, & j'ai par

ce moyen l'équation $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2} A\varphi r^{m+1} - \frac{1}{2} B\varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} t^{m+1} + \frac{B}{n+1} t^{n+1}$ par laquelle on voit bien qu'on ne peut pas manquer d'avoir le rapport cherché de t à r, quel que soit le rapport φ de la force centrifuge sous l'équateur, & quels que soient les nombres choisis pour A, B, m, n dans l'hypothèse de gravité $Ad^m + Bd^n$.

Lorsque φ est une très-petite quantité comme cela arrive dans le cas de la terre, le calcul peut se simplifier beaucoup.

Soit mis $r(1-\delta)$ à la place de t, & parconséquent $r^{m+1}\left(1 - \overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1}+\overline{m+2}}{2}\delta^2 - \frac{\overline{m+1}\times\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\delta^3 + \&c.\right)$ à la place de t^{m+1} & $r^{n+1}\left(1 - \overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{n+1}\times\overline{n+2}}{2}\delta^2 - \frac{\overline{n+1}\times\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2\times 3}\delta^3 + \&c.\right)$ à la place de t^{n+1}, & en substituant les quantités dans l'équation $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2}\varphi A r^{m+1} - \frac{1}{2} B\varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} t^{m+1} + \frac{B}{n+1} t^{n+1}$ elle deviendra $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2} A\varphi r^{m+1} - \frac{1}{2} B\varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} r^{m+1}\left(1 - \overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1}+\overline{m+2}}{2}\delta^2 - \&c.\right) + \frac{B}{n+1} r^{n+1}\left(1 - \overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{n+1}+\overline{n+2}}{2}\delta^2 - \&c.\right)$ qui se réduit à $-\frac{1}{2}\varphi A r^{m+1} - \frac{1}{2}\varphi B r^{n+1} = \frac{Ar^{m+1}}{m+1}\left(-\overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1}\times\overline{m+2}}{2}\delta^2 - \&c.\right) + \frac{B}{n+1} r^{n+1}\left(-\overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{r+1}\times\overline{n+2}}{2}\delta^2 - \&c.\right)$ ou bien $+\frac{\varphi}{2} A r^{m+1} + \frac{\varphi}{2} B r^{n+1}$

$$= Ar^{m+1}\left(\delta - \frac{m+2}{2}\,\delta^{2} + \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\,\delta^{2} - \&c.\right)$$

$$+ Br^{n+1}\left(\delta - \frac{n+2}{2}\,\delta^{2} + \frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2\times 3}\,\delta^{3} - \&c.\right)$$

$$= \left(Ar^{m+1} + Br^{n+1}\right)\delta - Ar^{m+1}\left(\frac{m+2}{2}\,\delta^{2} - \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\,\delta^{3} + \&c.\right) - Br^{n+1}\left(\frac{n+2}{2}\,\delta^{2} + \frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2+3}\,\delta^{3} + \&c.\right)$$

& en divisant les deux membres de cette derniere équation par $Ar^{m+1} + Br^{n+1}$, & transposant tous les termes où sont δ^{2}, δ^{3}, &c. on aura $\delta = \frac{\varphi}{2}$

$$+ \frac{Ar^{m+1}\left(\frac{m+2}{2}\,\delta^{2} - \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\,\delta^{3} + \&c.\right)}{Ar^{m+1} + Br^{n+1}}$$

$$+ \frac{Br^{n+1}\left(\frac{n+2}{2}\,\delta^{2} - \frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2\times 3}\,\delta^{3} + \&c.\right)}{Ar^{m+1} + Br^{n+1}}.$$

Si on suppose maintenant que δ soit une très-petite quantité, ainsi qu'elle l'est en effet pour la terre, on peut négliger sans scrupule tous les termes qui suivent $\frac{\varphi}{2}$, desorte que (quels que soient A, B, m, n,) δ qui marque ce que l'excès de l'équateur sur l'axe est à l'équateur, se trouve, sans erreur sensible, la moitié de ce que la force centrifuge est à l'égard de la gravité ; ainsi φ étant pour la terre $= \frac{1}{289}$, ou à $\delta = \frac{1}{578}$, ou, ce qui revient au même, les axes sont en ce cas comme 578 à 577 quels que soient A, B, m, n.

On verroit de même que quelque fut le nombre de termes tels que $A\delta^{m} + B\delta^{n} + C\delta^{p} + \&c.$ qu'on prendroit pour exprimer la gravité, & enfin que quelle que fut la loi de gravité,

pourvû qu'elle tendit au centre, le rapport des axes ne feroit pas fenfiblement plus grand que celui de 578 à 577.

XXVI.

M. *Clairaut* a démontré cette Propofition d'une autre maniere page 141. de fa Théorie de la figure de la terre, & il en a conclu que toutes les hypothèfes de pefanteur où la force tendroit vers le centre de la terre, devoient être exclues, quelle que fut la loi de cette tendance, puifque les obfervations ont appris que l'applatiffement de la terre eft plus confidérable que celui d'un fphéroïde dont les axes feroient entr'eux comme 578 à 577.

Il femble d'abord qu'on ne foit en droit de rejetter par ce calcul que les hypothèfes qui feroient dépendre la tendance vers un centre de la feule diftance à ce centre, mais fi l'on fe fouvient qu'on a vu Art. 15. que l'équilibre des fluides ne permet pas de fuppofer qu'il entre dans l'expreffion de la force qui tend vers un centre, autre chofe que la diftance à ce centre, on verra qu'on ne peut, fans être démenti par l'expérience journaliere de l'équilibre des eaux qui couvrent la terre, ou par les opérations faites au Nord, en France & à l'équateur pour déterminer la figure de la terre, recevoir aucune hypothèfe où la pefanteur ne tendit que vers un centre.

XXVII.

Je ne ferai aucune autre application du Problême précédent à la théorie de la figure de la terre, parce que mon but étant de traiter les matieres relatives au Livre des Principes, je dois donner la préférence aux hypothèfes où la gravité fur la terre dépend de l'attraction de toutes les parties de la terre : la détermination de la figure de la terre eft bien plus embarraffante dans ces hypothèfes, & elle feroit peut-être d'une difficulté infurmontable fans les abréviations qu'apporte la fuppofition que fes axes différent très-peu l'un de l'autre.

Je regarderai donc ces différences d'axes comme on regarde

les differentielles dans le calcul infinitésimal ; ainsi plus elles seront petites, plus les axes seront déterminés exactement par la théorie suivante.

Si, par exemple, les axes ne déférent entr'eux que de $\frac{1}{200}$e, ce qui est à peu près le cas de la terre ; les calculs suivans seroient exacts à $\frac{1}{(200)^2}$ ou $\frac{1}{40000}$ près, ou, ce qui revient au même, les erreurs qui pourroient s'y glisser seroient telles, qu'au lieu de trouver l'axe au diamétre de l'équateur comme 200 à 201, on le trouveroit peut-être comme 199 à 200, ou comme 201 à 202 ; on voit bien que de telles erreurs ne sont pas d'assez grande conséquence pour chercher à les éviter par des calculs très-pénibles.

SECTION IV.

SECONDE PARTIE.

De la théorie de la figure de la Terre, en supposant que la gravité soit le résultat des attractions de toutes les parties de la Terre.

XXVIII.

PROPOSITION I. PROBLÊME I.

On demande l'attraction qu'exerce un sphéroïde elliptique B E b e *sur un corpuscule* P *placé sur le prolongement de son axe de révolution.* Fig. 16.

Soient *BDbd* la sphére inscrite à ce sphéroïde, *EC* le diametre de l'équateur du sphéroïde, *Pmn*, *PMN* deux droites quelconques partant de *P* & faisant un angle infiniment petit

entr'elles, kmq, KMQ, LNR, lnr des plans élevés perpendiculairement à PBb.

Nous chercherons premierement l'attraction qu'exercent sur P, suivant PC, les deux petits anneaux produits par la révolution de $KMkm$, $LNln$ autour de Bb.

La petite couronne produite par la révolution de KM, aura pour valeur $KM \times QM \times c$ (en supposant que c exprime le rapport de la circonférence au rayon,) & multipliant cette valeur par l'épaisseur Qq, $KM \times QM \times C \times Qq$ exprimera la solidité de l'anneau $KMKm$, & toutes les parties de l'anneau attirant également le corpuscule P, il faut multiplier cette expression $KM \times c \times QM \times Qy$ par $\frac{1}{PM^2} \times \frac{PQ}{PM}$ qui exprime l'attraction du corpuscule placé en M sur P, décomposée suivant PQ, & le produit $c \times KM \times QM \times Qq \times \frac{PQ}{PM^3}$ exprimera l'attraction de l'anneau entier sur P dans la direction PQ.

Remarquant maintenant qu'à cause de la propriété de l'ellipse $KM = QM \times \frac{DE}{CD}$, & que les triangles semblables PCO, PQM donnent $\frac{PO}{PC} = \frac{PQ}{PM}$, & $\frac{CO}{PC} = \frac{MQ}{PM}$, l'expression précédente se changera en $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times Qq$.

On verroit de même que l'attraction de l'anneau $NLln$ dans la même direction, feroit $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times Rr$, ainsi la somme de ces deux attractions sera $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times \overline{Qq + Rr}$ ou $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times d(QR)$

Soit faites les lignes $CD = r$. $CP = e$. $OM = ON = u$.

& le rapport $\frac{ED}{CD} = \delta$, on aura $CO = \sqrt{rr - uu}$, & par conséquent $PO = \sqrt{PC^2 - CO^2} = \sqrt{ee - rr + uu}$, & $QR = \frac{2u\sqrt{ee - rr + uu}}{e}$; donc l'expression $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{CP^3} \times \overline{Qq + Rr}$ deviendra $c\delta(rr - uu) \times \frac{\sqrt{ee - rr + uu}}{e^3} \times d\left(\frac{2u\sqrt{ee - rr + uu}}{e}\right) = c\delta(rr - uu) \times \frac{\sqrt{ee - rr + uu}}{e^3} \times \frac{\overline{2ee - rr}du + 4uudu}{e\sqrt{ee - rr + uu}}$ qui se réduit à $c\delta\, du \left(\frac{2e^2r^2 - 2r^4}{e^4}\right) + c\delta u^2 du \left(\frac{6r^2 - 2e^2}{e^4}\right) - \frac{4c\delta u^4 du}{e^4}$, dont l'intégrale $c\delta \left(\frac{2e^2r^2 - 2r^4}{e^4}\right) u + c\delta \left(\frac{6r^2 - 2e^2}{3e^4}\right) u^3 - \frac{4c\delta u^5}{5e^4}$, exprimera l'atttraction que le solide produit par la révolution de l'espace $KMNL$ autour de Bb exerce sur P.

Si l'on fait dans cette valeur $u = r$, c'est-à-dire, $MO = NO = CD$, elle deviendra $\frac{4cr^3\delta}{3e^2} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$ & exprimera l'attraction de tout l'espace compris entre la sphére & le sphéroïde: ainsi ajoutant à cette expression $\frac{2cr^3}{3ee}$, qui suivant l'Article quatriéme de la deuxiéme Section, exprime l'attraction de la sphére $BDbd$ sur le même corpuscule, on aura $\frac{4cr^3\delta}{3e^2} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4} + \frac{2cr^3}{3e^2}$ pour l'attraction demandée du sphéroïde. *C. Q. F. T.*

XXIX.

COROLLAIRE.

Si on suppose $r = e$, c'est-à-dire, si on suppose que le corpuscule soit placé au pole du sphéroïde, l'expression précédente se réduira à $\frac{2cr}{3} + \frac{8}{15} cr\delta$.

XXX.

PROPOSITION II. LEMME I.

KoL *représentant un cercle ou une ellipse, ou toute autre courbe dont les diamètres sont partagés en deux parties égales par le centre* H, *je dis que l'attraction que cette figure exerce sur un corpuscule placé en* μ *dans la ligne* μH *élevée perpendiculairement au-dessus de son centre, ne diffère de celle qu'il exerceroit sur un corpuscule placé en* M *à même hauteur que* μ, *& à une distance infiniment petite de ce point* μ, *que d'une quantité infiniment petite du second ordre.*

Fig. 17. Tirant un diamètre quelconque KL à la figure proposée, & joignant les lignes KM, ML, l'attraction suivant μH que deux particules égales supposées en K & en L exercent sur μ, sera exprimée par $\frac{H\mu}{K\mu^3} + \frac{H\mu}{\mu L^3}$; l'attraction de K sur μ suivant $K\mu$ est $\frac{1}{K\mu^3}$, & $\frac{H\mu}{K\mu} \times \frac{1}{K\mu^2}$ est la partie de cette force qui agit suivant $H\mu$ en la décomposant; car on aura $K\mu : H\mu :: \frac{1}{\mu K^2} : \frac{H\mu}{K\mu^3}$, prenant 1 pour la masse de chaque particule supposée K & en L.

L'attraction des mêmes particules sur M suivant MV abaissée perpendiculaire au plan KL, sera $\frac{MV}{KM^3} + \frac{MV}{LM^3}$ abaissant ensuite VX perpendiculaire à KL, & faisant les lignes $HL = KH = b$. $\mu H = MV = a$. $K\mu = \sqrt{aa + bb} = c$. $HX = \alpha$. $XV = \beta$, on aura $KX = b + \alpha$, $XL = b - \alpha$, $HV = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $HM = \sqrt{a^2 + \alpha^2 + \beta^2}$, $KM = \sqrt{cc + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha b}$, $ML = \sqrt{cc - 2\alpha b + \alpha^2 + \beta^2}$.

Si on substitue maintenant ces valeurs dans les expressions $\frac{\mu H}{K\mu^3} + \frac{\mu H}{L\mu^3}$ & $\frac{MV}{KM^3} + \frac{MV}{ML^3}$, elles se changeront en $\frac{2a}{c^3}$ &

& $\frac{a}{(cc+\alpha^2+\beta^2+2\alpha b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a}{(c^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha b)^{\frac{3}{2}}}$. Si l'on éleve maintenant, par le binome de *Newton*, les quantités qui sont au dénominateur, & qu'on néglige les secondes, troisiémes, &c. puissances des quantités infiniment petites α, β, le terme $\frac{a}{(c^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha b)^{\frac{3}{2}}}$ se changera en $a \times c^{-3} - \frac{3}{2} c^{-5} \times 2b\alpha$ ou $\frac{a}{c^3} - \frac{3ab\alpha}{c^5}$, & le terme $\frac{a}{(cc-2b\alpha+\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ deviendra $\frac{a}{c^3} + \frac{3ab\alpha}{c^5}$, & ajoutant ces deux termes, on aura pour leur somme $\frac{2a}{c^3}$; donc les deux corpuscules placés en *K* & en *L* exercent en μ & en *M* suivant μH & *MV*, la même force à un infiniment petit près du second ordre.

L'attraction que les corpuscules *K* & *L* exercent en *M*, ne se faisant pas dans l'exacte rigueur suivant *MV*, il faut, outre cette attraction suivant *MV*, en prendre deux nouvelles, dont l'une agit dans la direction *XV* perpendiculaire à *KL*, & l'autre suivant *KL*. L'attraction suivant *XV*, seroit de même exprimée par $\frac{XV}{KM^3} + \frac{XV}{ML^3}$, celle suivant *KL* le seroit par $\frac{KX}{KM^3} - \frac{LX}{ML^3}$; mais comme ces deux attractions sont infiniment petites, & qu'elles agissent dans des directions perpendiculaires à *MV*, on voit qu'elles ne produiront jamais par leur composition avec la force suivant *VM* qu'une somme qui ne differera de la premiere qu'on a trouvé avant de faire attention à ces forces, que d'un infiniment petit du second ordre, par la même raison que l'hipoténuse d'un triangle, dont un côté est fini & l'autre infiniment petit, ne differe de son côté fini que d'un infiniment petit du second ordre.

Dès qu'on est donc assuré que deux corpuscules égaux placés en *K* & en *L* attirent également les corps placés en μ & en *M*, on voit qu'il en doit être de même d'une figure quelconque *KoL*,

pourvu que *H* ſoit le centre de cette figure, c'eſt-à-dire, pourvu que toutes les lignes qui la traverſent ſoient partagées en deux parties égales lorſqu'elles paſſent par *H*.

L'attraction abſolue que les corpuſcules égaux placés en *K* & en *L* exercent ſur *M*, ſe faiſant ſuivant une direction qui diffère infiniment peu de *HM*, il eſt clair que leur attraction, ſuivant cette direction, ne différera de leur attraction abſolue, que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, & que par conſéquent la figure *KoL* exercent en μ ſuivant $H\mu$, & en *M* ſuivant *HM* des attractions qui peuvent être priſes l'une pour l'autre, en négligeant les différences du ſecond ordre. *C. Q. F. D.*

XXXI.

PROPOSITION III. LEMME II.

P E p e *repréſentant un ſphéroïde elliptique infiniment peu différent d'une ſphère dont* P p *eſt l'axe de révolution*, E e *le diamétre de l'équateur*, N n *un diamétre quelconque de ce ſphéroïde*, & M *un corpuſcule placé ſur le prolongement de ce diamétre ; je dis que l'attraction exercée par le ſphéroïde ſur ce corpuſcule ſuivant la direction* M N, *ſera la même que celle qu'exerceroit un autre ſphéroïde dont* N n *ſeroit l'axe de révolution*, & *dont la quantité de matiere ſeroit la même que celle du premier.*

Fig. 18. Pour le démontrer ſoit imaginé le ſphéroïde *PEpe* coupée en une infinité de tranches *LlKk* par des plans perpendiculaires au méridien *PEpe* ſur les ordonnées *LK*, *lk* au diamétre *Nn* ; *H* étant le centre de ces tranches, leurs attractions ſur *M* ſeront les mêmes par l'Article 30. que celles qu'elles exerceroient dans le cas où l'on feroit mouvoir toutes ces tranches autour des points *H*, juſqu'à ce qu'elles devinſſent perpendiculaires à *NHn*, à cauſe que ſuppoſant l'ellipſoïde infiniment peu différent d'une ſphère, les diamétres *HN* ne peuvent faire avec leurs ordonnées *LK* que des angles infiniment peu différens de l'angle droit.

Le solide qu'on auroit par le mouvement infiniment petit supposé aux tranches *LK*, *lk* qui les mettroit dans une situation perpendiculaire à l'axe *Nn*, ne différeroit en solidité du sphéroïde *PEpe* que d'un infiniment petit du second ordre.

De plus, l'attraction de chacune des tranches elliptiques qui le composeroient, pourroient être regardée comme égale à celle que produiroit des cercles de même superficie, car ces ellipses diffèrent infiniment peu de ces cercles par la supposition ; or les cercles qui les égalent en superficie étant supposés placés sur le même plan qu'elles, & avoir le même centre, les différences de leurs attractions sur le corpuscule, ne pourroient être attribuées qu'au plus ou au moins de distance des parties qui composeroient les espéces de lunulles qui marqueront l'excédent des deux figures l'une sur l'autre ; or ces lunulles étant infiniment petites, le plus ou le moins de distance de leurs parties au corps attiré ne produira qu'un infiniment petit du second ordre dans l'attraction. *C. Q. F. D.*

XXXII.

PROPOSITION IV. LEMME III.

PE *étant une ellipse infiniment peu différente du cercle*, $PC = 1$ *étant son petit axe*, $1 + \delta = CE$ *son second axe*, $S =$ *sinus de l'angle* MCP, *le rayon* CM *aura pour valeur* $1 + \delta SS$ *en négligeant le quarré de* δ *& ses puissances plus élevées.*

Ayant décrit sur l'axe *PC* le quart de cercle *PD*, on verra, par la propriété de l'ellipse, que $MO : QO :: ED : CD$, c'est-à-dire, que $MO = QO \times \delta$; mais à cause que *MO* est infiniment petite par l'hypothèse, *MIO* pourra être pris pour un triangle, lequel sera semblable au triangle *OCQ* ; on aura donc $OC : OQ :: MO : MI$, c'est-à-dire, $1 : OQ :: OQ \times \delta : MI$; donc $MI = OQ^2 \times \delta$; donc $CM = CO + MI = OC + (QO^2) \times \delta$, ou $1 + (QO^2) \times \delta$, ou bien $CO + \left(\frac{MQ^2}{MC^2}\right) \times \delta$; car Fig. 19.

puisque $OC = 1$, $\frac{MQ}{MC}$ ne différe de $\frac{OQ}{OC} = QO$ que d'une grandeur infiniment petite; donc $\delta \times (OQ^2)$ déja infiniment petit, ne peut différer de $\delta \times \left(\frac{MQ^2}{MC^2}\right)$ ou δSS que d'un infiniment petit du second ordre; donc on aura $CM = 1 + \delta SS$.

XXXIII.

PROPOSITION V. LEMME IV.

Préparation du Lemme 4.

On a vu par les Propositions 2 & 3 de cette Section, l'attraction qu'un sphéroïde quelconque, composé d'une infinité de couches de densités & d'ellipticités différentes, exerce sur les corpuscules placés à sa surface dans la direction du rayon; mais comme cette direction n'est pas celle suivant laquelle se fait l'attraction du sphéroïde, on va chercher les moyens d'avoir la véritable direction. On voit bien, à cause de la différence infiniment petite qui est supposée entre le sphéroïde & la sphére, que la vraie direction de l'attraction ne peut s'écarter que d'un angle infiniment petit de la direction du rayon, & qu'ainsi la force de l'attraction est telle qu'on vient de la trouver quant à la quantité, & que quant à la direction, elle n'en différe que d'un infiniment petit du second ordre; mais on a besoin, pour la figure de la terre, d'avoir, outre la quantité absolue de l'attraction à un point quelconque, la vraie direction de l'attraction à ce point.

Fig. 20. *Lemme* 4. L'attraction qu'un cercle RIr exerce sur un corpuscule M placé perpendiculairement au-dessus du point H, lequel est infiniment peu écarté du centre Y, étant décomposée suivant HY, la partie de cette force résultante de cette décomposition sera exprimée par $\frac{\frac{3}{2}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$ (RHY étant le diamétre qui passe par le point H) en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre.

Ayant élevé IHi perpendiculaire à Rr, & transporté le segment IRi en iZI, il est évident que l'espace lunulaire $iZIr$ sera la seule partie du cercle $RIri$ qui attirera le corpuscule M dans la direction Rr, puisque les deux segmens IRi, IZi ont des attractions qui se détruisent.

Supposons l'espace $IriZ$ partagé en une infinité d'élémens par les lignes QTS, qts perpendiculaires à Ii, il est évident que l'attraction absolue de chaque élément $TtSs$ sur M, sera cet espace même divisé par le quarré de la distance TM; donc $\frac{TtSs}{TM^2}$ est cette force; mais il faut la décomposer suivant HY, ou sa parallèle QT; or cette décomposition la diminuera dans la raison de QT à MT, donc $\frac{TtSs}{TM^3} \times QT$ est l'attraction de l'élément $TtSs$ suivant la direction HY.

Mais la valeur de $TtSs$ est $TS \times Qq$ & $TS = 2HY$ par la construction; donc l'attraction de l'élément $TtSs$ est $\frac{2HY \times Qq \times QT}{MT^3}$, ou $\frac{2HY \times Qq \times QT}{MR^3}$, en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Pour intégrer cette quantité dans laquelle HY & MR sont des constantes, je remarque que $Qq \times QT$ est la différentielle du segment $HQTZ$; donc $\frac{2HY}{MR^3} \times HQTZ$ est l'attraction que l'espace $TZVS$ exerce sur M suivant HY.

Supposant ensuite $HQ = Hi$, on aura $\frac{2HY}{MR^3} \times HiZ$ pour l'attraction de l'espace $iTZrS$, dont le double $\frac{4HY}{MR^3}(HiZ)$ sera l'attraction de $IZiSr$, ou, ce qui revient au même, l'attraction du cercle entier.

Si on regarde dans cette valeur l'espace $iHZI$ comme un demi cercle dont le rayon seroit RH, ce qui ne peut apporter

qu'une erreur infiniment petite du second ordre, cette expression $\frac{4HY}{MR^3}$ (HiZ) se changera en $\frac{\frac{4}{5}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$.

XXXIV.

COROLLAIRE.

Si la courbe $RirI$ au lieu d'être un cercle étoit une autre courbe qui s'en écartât infiniment peu, telle qu'une ellipse dont Rr seroit l'un des axes, & dont l'autre axe différeroit infiniment peu de celui-ci, l'attraction pourroit toujours, sans erreur sensible, être exprimée par $\frac{\frac{4}{5}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$; car on voit bien que si l'on faisoit entrer dans le calcul la différence des axes de cette ellipse, elle ne pourroit produire dans une quantité, déja infiniment petite par elle-même, qu'une quantité infiniment petite du second ordre.

XXXV.

PROPOSITION VI. LEMME V.

Soit KLkl *un sphéroïde dont l'axe de révolution* Kk *differe infiniment peu du diamétre de l'équateur* Ll, *soient de plus* M *un corpuscule placé hors du sphéroïde*, PMEρe *l'ellipse semblable à* KLkl *laquelle passeroit par le corpuscule* M, MX *la perpendiculaire en* M *à cette ellipse, laquelle perpendiculaire est terminée par la ligne* CX *élevée perpendiculairement sur* CM; *je dis que l'attraction que le sphéroïde* KLkl *exercera sur* M *dans la direction* CX, *aura pour expression* $\frac{2}{5}c \times \frac{CN^5}{CM^5} \times CX$.

Fig. 21. Soient MRS, $M\rho\Sigma$, deux droites partant de M & rencontrant le sphéroïde: $R\rho r\rho$, $S\Sigma s\sigma$ les deux tranches de ce sphéroïde que retranchent les plans élevés perpendiculairement sur MC, & passant par les points R, ρ, Σ, S, soit de plus μYZ la droite qui coupe en deux parties égales toutes les perpendiculaires

ou ordonnées Rr, $\mathrm{P}\rho$, Ss, $\Sigma\sigma$, ou, ce qui revient au même, le diamétre de ces ordonnées.

Il est évident que la différentielle de l'attraction que la tranche quelconque $RrSs$ du sphéroïde exerce sur M dans la direction CX, sera l'attraction de la tranche infiniment petite $Rr\mathrm{P}\rho$, moins celle de la tranche $Ss\Sigma\sigma$, parce que la premiere attire dans la direction HY, & la seconde dans la direction opposée IZ, toutes deux paralléles à CX.

Par la Proposition précédente $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3}$ sera l'attraction de la tranche $RPrS$, & par le même Lemme $\frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ sera l'attraction de la tranche $Ss\Sigma\sigma$; donc $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3} - \frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ est la différentielle de l'attraction cherchée.

Je remarque maintenant qu'on peut prendre, sans erreur sensible l'angle CMX pour le même que l'angle $C\mu x$, car le point μ ne peut être qu'infiniment peu écarté de M à cause de l'infiniment petite différence qui est entre l'ellipse $PEpe$ & le cercle; mais l'angle $C\mu x$ seroit le même que l'angle μCM, puisque $C\mu$ étant le diamétre des ordonnées Rr, &c. la tangente en μ est paralléle à Rr, ou perpendiculaire à CHM; donc l'angle $MC\mu$ peut être supposé sans erreur sensible $= CMX$.

Cela posé, on aura $CH : HY$ & $CI : ZI :: CM : CX$; substituant donc $CH \times \frac{CX}{CM}$ à HY & $CI \times \frac{CX}{CM}$ à ZI, l'expression précédente $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3} - \frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ se changera en $\frac{1}{2}c \times \frac{CX}{CM}\left(\frac{RH^2 \times CH \times Hh}{MR^3} - \frac{SI^2 \times CI \times Ii}{MS^3}.\right)$

Pour réduire cette expression, je remarque encore que si la courbe $KLkl$ étoit un cercle, & que par conséquent $CH^2 + RH^2$ fut égal à la constante CR^2, on auroit $CH \times Hh$

$+ RH \times dRH = 0$; mais comme la courbe $KLkl$ diffère infiniment peu du cercle, cette équation n'a qu'une erreur infiniment petite, lorsqu'on en fera usage dans la valeur de l'attraction cherchée déja infiniment petite par elle-même ; donc on pourra mettre, sans erreur sensible, dans l'expression précédente $- RH \times dRH$ à la place de $CH \times Hh$ & $- SI \times dSI$, à la place de $CI \times Ii$.

Cela fait, l'expression précédente se changera en $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM}$ $\left(-\frac{RH^3}{MR^3} \times d(RH) + \frac{SI^3}{MS^3} \times d(SI)\right)$, qui deviendra $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM}\left(-\frac{CG^3}{MC^3} d(RH) + \frac{CG^3}{MC^3} d(SI)\right)$, ou $\frac{1}{2} c$ $\times \frac{CX}{CM^4} \times \left(CG^3 \times d(SI - RH)\right)$ en mettant $\frac{CG}{MC}$ à la place de $\frac{RH}{MR}$ & de $\frac{SI}{MS}$, CG étant une perpendiculaire abaissée de C sur MS.

Pour intégrer maintenant cette différentielle, je fais les lignes $CM = c$. $CN = r$. $RG = u$, & j'ai $CG = \sqrt{rr - uu}$, $RS = 2u$, $SI - RH = 2u\sqrt{rr - uu}$; soient donc substituées ces valeurs dans la formule $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM^4} \times CG^3 d(SI - RH)$, & elle deviendra $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{c^4} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} \times d\left(\frac{2u\sqrt{rr - uu}}{c}\right)$; mais $d\left(\frac{2u\sqrt{rr-uu}}{c}\right) = \frac{2r^2du - 4uudu}{c\sqrt{rr - uu}}$; donc $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{c^4}$ $(r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} \times d\left(\frac{2u\sqrt{rr-uu}}{c}\right) = \frac{1}{2} c \times \frac{CX}{c^5} \times \overline{r^2 - u^2}$ $\overline{2r^2 - 4u^2} \times du$ ou $c \times \frac{CX}{c^5} (r^4 du - 3r^2u^2 du + 2u^4 du)$ dont l'intégrale est $c \times \frac{CX}{c^5}\left(r^4 u - r^2 u^3 + \frac{2}{5} u^5\right)$ valeur de l'attraction

l'attraction de la tranche quelconque $RrSs$, & faisant dans cette valeur $u = r$, c'est-à-dire, $RS = Nn$, on aura $c \times \frac{CX}{e^5}\left(\frac{2}{5} r^5\right) = \frac{2}{5} c \times \frac{CX}{CM^5} \times CN^5$ pour l'attraction du sphéroïde entier $KLkl$ sur M suivant CX. *C. Q. F. D.*

XXXVI.

PROPOSITION VII. PROBLÊME II.

Trouver l'attraction qu'un sphéroïde elliptique PMEKT, *composé d'une infinité de couches telles que* BbFfOo *toutes de densités & d'ellipticités* * *différentes, exerce sur un corpuscule placé en un point quelconque* M *de sa surface.*

Ayant fait les lignes $PC = e$. $CE = e(1 + \delta)$ = rayon de l'équateur : CB demi axe de la couche quelconque $BNFO = r$, CF rayon de l'équateur de cette couche $= r(1 + \gamma)$, le sinus de l'angle $PCM = s$. On commencera par chercher l'attraction que le sphéroïde BFO, supposé homogéne, exerceroit sur le corpuscule placé en M; on a vû ci-dessus (Article 33.) que le sphéroïde BFO exercera sur M la même attraction qu'un sphéroïde dont NO seroit l'axe de révolution, & dont la solidité seroit la même ; il faut donc chercher quel doit être le second axe de ce nouveau sphéroïde supposé égal en quantité de matiere à BFO, & qui a pour premier axe de révolution la droite NO. Fig. 20.

La solidité du sphéroïde $BNFO$ dont l'axe de révolution $BC = r$, & le second $= r(1 + \gamma)$ doit être $\frac{2}{3} c r^3 (1 + \gamma)^2$ (c exprimant le rapport de la circonférence au rayon :) supposant que $CN(1 + \epsilon)$ soit le rayon cherché de l'équateur du

* On appelle ici l'ellipticité d'un sphéroïde, la fraction qui exprime la différence du rayon de l'équateur à l'axe par rapport à l'axe.

ſphéroïde, ſa ſolidité ſera, par la même raiſon, $\frac{2}{3}\, c \times CN^3 (1+\iota)^2$, & en égalant ces deux expreſſions, il viendra $\frac{2}{3}\, c r^3 (1+\gamma)^2 = \frac{2}{3}\, c \times CN^3 (1+\iota)^2$, d'où l'on tire $\frac{r^3 (1+\gamma)^2}{CN^3} = \overline{1+\iota}^{\,2}$ ou $\frac{r^{\frac{3}{2}}\, 1+\gamma}{CN^{\frac{3}{2}}} = 1+\iota$; mais par l'Article 32. de cette Section, CN doit avoir pour valeur $r(1+\gamma ss)$ donc $1+\iota = \frac{r^{\frac{3}{2}}(1+\gamma)}{r^{\frac{3}{2}}(1+\gamma ss)^{\frac{3}{2}}}$, ou $\overline{1+\gamma} \times (1+\gamma ss)^{-\frac{3}{2}}$, ou $\overline{1+\gamma} \times \overline{1-\frac{3}{2}\gamma ss}$, (en élevant par le binome de *Newton* $(1+\gamma ss)^{\frac{3}{2}}$ & en négligeant les $\gamma\gamma$) ou enfin $1+\gamma-\frac{3}{2}\gamma ss$ en négligeant encore les $\gamma\gamma$; ayant donc $1+\iota = 1+\gamma - \frac{3}{2}\gamma ss$, on aura $\gamma(1-\frac{3}{2}ss)$ pour la valeur cherchée de ι, c'eſt-à-dire, pour l'ellipticité du ſphéroïde dont l'axe de révolution feroit NO, & dont la quantité de matiere feroit la même que celle du ſphéroïde $BNFO$.

Cela poſé, il ne s'agit plus que d'avoir l'attraction qu'exerce un ſphéroïde, dont le demi axe de révolution eſt $CN = r(1+\gamma ss)$, & dont l'ellipticité eſt $\gamma(1-\frac{3}{2}ss)$ ſur un corpuſcule placé ſur cet axe de révolution à la diſtance CM, laquelle diſtance $= e(1+\delta ss)$ par l'Article 32.

On a démontré ci-devant (Article 35.) que lorſque le demi axe de révolution eſt r, l'ellipticité δ, & la diſtance du corpuſcule au centre e, l'expreſſion de l'attraction étoit $\frac{2cr^3}{3ee} + \frac{4cr^3\delta}{3ee} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$, il faut donc mettre dans cette expreſſion $r(1+\gamma ss)$ à la place de r, & $e(1+\delta ss)$ à la place de e, & $\gamma(1-\frac{3}{2}ss)$ à la place de δ.

Comme les deux derniers termes $\frac{4cr^3\delta}{3ee} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$ de la quantité dans laquelle on doit faire la ſubſtitution ſont affectés de la lettre δ qui repréſente une quantité infiniment petite, il

ſera inutile de mettre pour r, & pour e, des quantités qui en diffèrent infiniment peu ; ainſi il ſuffira de mettre dans ces deux termes, à la place de δ, $\gamma\,(1 - \frac{3}{2}ss)$; mais dans le terme $\frac{2cr^3}{3ee}$ qui eſt fini, il faudra ſubſtituer $r\,(1 + \gamma ss)$ à r, & $e\,(1 + \delta ss)$ à e.

Faiſant maintenant cette ſubſtitution, on aura pour le premier terme $\frac{2cr^3}{3ee}\,\frac{(1+\gamma ss)^3}{(1+\delta ss)^2}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee}\,\frac{(1+3\gamma ss)}{(1+2\delta ss)}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee}$ $(1 + 3\gamma ss - 2\delta ss)$ en négligeant les δ^2, les γ^2, & les $\delta\gamma$, & en élevant les quantités par le binome, & effectuant la diviſion indiquée.

On aura enſuite pour les termes $\left(\frac{4cr^3}{3ee} - \frac{4cr^5}{5e^4}\right)\delta$ la quantité $\left(\frac{4cr^3}{3e^2} - \frac{4cr^5}{5e^4}\right)\gamma\,(1 - \frac{3}{2}ss)$ qui devient $\frac{4cr^3\gamma}{3e^2} - \frac{4cr^5\gamma}{5e^4} - \frac{2cr^3ss\gamma}{ee} + \frac{6cr^5ss\gamma}{5e^4}$, & en ajoutant ces deux quantités, on aura enfin $\frac{2cr^3}{3e^2}(1 + 3\gamma ss - 2\delta ss) + \frac{4cr^3\gamma}{3e^2} - \frac{4cr^5\gamma}{5e^4} + \frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4} - \frac{2cr^3\gamma ss}{ee}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee} - \frac{4cr^3ss\delta}{3ee} + \frac{4cr^3\gamma}{3ee} - \frac{4cr^5\gamma}{5e^4} + \frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4}$, & c'eſt là la valeur de l'attraction que le ſphéroïde $BNFO$, ſuppoſé d'une denſité uniforme, exerce ſur le corpuſcule M.

Pour avoir l'attraction du même ſphéroïde, en ſuppoſant qu'il ſoit compoſé de couches qui varient tant en denſité qu'en ellipticité, ſoit différenciée l'expreſſion précédente, & l'on aura $\frac{2crrdr}{ee} - \frac{4cr^2\delta ssdr}{ee} + \frac{4c}{3ee}\,d(r^3\gamma) - \frac{4c}{5e^4}\,d(r^5\gamma)$ $\frac{6c}{5e^4}\,d(r^5\gamma)ss$, qui exprimera l'attraction de l'orbe $BNFO$ $bnfo$, (r & γ étant les indéterminées.)

Soit maintenant R la densité de cet orbe, on n'aura plus qu'à multiplier la différentielle précédente par R, & l'intégrant, ensuite on aura l'attraction du sphéroïde *BNFO* de densité variable; faisant enfin dans cette intégrale $r = e$, elle exprimera l'attraction du sphéroïde proposé *PMEKT*. *C. Q. F. T.*

Nommant en général A la quantité que devient $\frac{Rrrdr}{ee}$ lorsqu'elle est intégrée, complettée, & qu'on y a substitué e à la place de r, B & D les quantités que deviennent $\frac{R}{ee}d(r^3\gamma)$ & $\frac{R}{e^4}d(r^5\gamma)$ dans la même supposition, l'expression précédente $\frac{2c}{ee}\int Rrrdr - \frac{4c\delta ss}{ee}\int Rrrdr + \frac{4c}{3ee}\int Rd(r^3\gamma) - \frac{4c}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma) + \frac{6c}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma)ss$, prendra cette forme $2cA + 4c\delta ssA + \frac{4}{3}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cssD$.

Si on fait dans cette valeur $s = o$, ce qui suppose le corpuscule au pole, elle se réduira à $2cA + \frac{4}{3}cB - \frac{4}{5}cD$.

Et si l'on fait $s = 1$, ce qui suppose le corpuscule à l'équateur, $2cA - 4c\delta A + \frac{4c}{3}B + \frac{2c}{5}D$.

XXXVII.

COROLLAIRE I.

Si l'on se proposoit d'avoir l'attraction que le sphéroïde *PMEKT* exerceroit sur le corpuscule M dans le cas où l'on supposeroit ce sphéroïde homogéne, on reprendroit la quantité $\frac{2cr^3}{3ee} - \frac{4cr^3\delta ss}{3ee} - \frac{4cr^5\gamma}{5e^4} + \frac{4cr^3\gamma}{3ee} + \frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4}$ qui exprime l'attraction du sphéroïde *BNFO* sur M, & on feroit

dans cette expreſſion $r = e$ & $\gamma = \delta$, ce qui la changeroit en $\frac{2}{3}ce + \frac{8}{15}ce\delta - \frac{2}{15}ce\delta ss$.

Si dans cette valeur on fait $s = o$, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe que le point *M* devient le point *P* ou le pole du ſphéroïde, l'attraction ſera alors exprimée par $\frac{2}{3}ce + \frac{8}{15}ce\delta$, qui eſt la même expreſſion qu'on a trouvée précédemment dans l'Article 29.

Si on fait $s = 1$, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe que le point *M* devienne le point *E*, & qu'il ſoit par conſéquent à l'équateur, on aura en ce cas $\frac{2}{3}ce + \frac{8}{15}ce\delta$ pour l'attraction en ce lieu, laquelle eſt, comme l'on voit, plus petite qu'au pole, de la quantité $\frac{2}{15}ce\delta$.

Et ſi on compare cette différence avec l'attraction entiere au pole $\frac{2}{3}ce + \frac{6}{15}ce\delta$, on aura par le rapport $\frac{\frac{2}{15}ce\delta}{\frac{2}{3}ce + \frac{8}{15}ce\delta}$, ou $\frac{\delta}{5 + 3\delta}$, ou enfin $\frac{\delta}{5}$, en négligeant les δ^2 & puiſſances plus élevées; donc l'attraction au pole ſurpaſſe celle à l'équateur d'une fraction, qui eſt la cinquiéme partie de celle qui marque l'excès du diamétre de l'équateur ſur l'axe.

XXXVIII.

COROLLAIRE II.

Si on ſuppoſe que ce ſphéroïde ſoit compoſé de couches toutes ſemblables entr'elles, & dont la denſité augmente uniformément du centre à la circonférence, on aura alors $\gamma = \delta$ & $R = mr$, quantités qu'il faudra ſubſtituer dans l'expreſſion générale.

On voit d'abord que $\frac{Rrrdr}{ee}$ ſera $\frac{mr^3dr}{ee}$ dont l'intégrale

eſt $\frac{mr^4}{4ee}$, dans laquelle faiſant $e=r$, on a $\frac{mee}{4}$ pour la valeur de A.

On a de même $\frac{Rd(r^3\gamma)}{ee} = \frac{3m\delta r^3 dr}{ee}$, dont l'intégrale $\frac{3m\delta r^4}{4ee}$ donne $\frac{3m\delta ee}{4}$ pour la valeur de B lorſque $r=e$.

On a enfin $\frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4} = \frac{5m\delta r^5 dr}{e^4}$, dont l'intégral e $\frac{5m\delta r^6}{6e^4}$ donne $\frac{5m\delta e^2}{6}$ pour la valeur de D lorſque $r=e$.

Subſtituant ces valeurs de A, B, D dans l'expreſſion générale de l'attraction, laquelle on vient de trouver à la fin de cette Propoſition, $2cA - 4c\delta ssA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{7}cD + \frac{6}{7}cssD$, elle ſe réduira à $e^2mc(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\delta)$, dans laquelle expreſſion s n'entrant pas, on voit que quelle que ſoit la poſition du point M dans cette hypothèſe de denſité, l'attraction vers le centre ſera toujours la même.

XXXIX.

COROLLAIRE III.

Suppoſant à préſent que les ellipſes des couches ſoient d'autant plus applaties qu'elles ſont plus éloignées du centre, ou, ce qui revient au même, faiſant $\gamma = \frac{\delta r}{e}$, & ſuppoſant de plus que la denſité qui eſt ſuppoſée donnée, & qui au centre eſt $=m$, diminue continuellement & uniformément du centre à la ſurface, c'eſt-à-dire, que $R = me - pr$, ou que plus la quantité p ſera grande, plus R ou la denſité diminue; & faiſant enſuite les ſubſtitutions indiquées pour avoir A, B, D dans ces ſuppoſitions, on aura $\frac{Rrrdr}{ee} = A = \frac{mer^2dr - pr^3dr}{ee}$, dont l'intégrale $\frac{mer^3}{3ee} - \frac{pr^4}{4ee}$ donne $(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p)ee$ pour la valeur de A en faiſant $r=e$.

On aura enſuite $\frac{R\,d\,(r^3\,\delta)}{e\,e} = B = \frac{m\,e - p\,r}{e\,e} \times d\left(\frac{\delta\,r^4}{e}\right)$ $= \frac{4\,m\,e\,\delta\,r^3\,d\,r - 4\,p\,\delta\,r^4\,d\,r}{e^3}$, dont l'intégrale $\frac{m\,e\,\delta\,r^4}{e^3} - \frac{4}{5}\,p\,\frac{\delta\,r^5}{e^3}$ donne $B = e^2\,\delta\,(m - \frac{4}{5}\,p)$ en faiſant $r = e$.

Et enfin $\frac{R\,d\,(r^5\,\gamma)}{e^4} = D = \frac{6\,m\,e\,\delta\,r^5\,d\,r - 6\,p\,\delta\,r^6\,d\,r}{e^5}$, dont l'intégrale $\frac{m\,e\,\delta\,r^6 - \frac{6}{7}\,p\,\delta\,r^7}{e^5}$ donne $D = (m - \frac{6}{7}\,p)\,\delta\,e^2$ lorſque $r = e$.

Subſtituons maintenant ces valeurs de A, B, D dans l'expreſſion générale $2\,c\,A - 4\,c\,s\,s\,\delta\,A + \frac{4}{3}\,c\,B - \frac{4}{3}\,c\,D + \frac{6}{5}\,c\,s\,s\,D$, & nous aurons $2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p) - 4\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p)\,s\,s\,\delta + \frac{4}{3}\,c\,e^2\,\delta\,(m - \frac{4}{5}\,p) - \frac{4}{3}\,c\,\delta\,e^2\,(m - \frac{6}{7}\,p) + \frac{6}{5}\,c\,s\,s\,\delta\,e^2\,(m - \frac{6}{7}\,p)$ ou $2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p) + c\,s\,s\,\delta\,e^2\,(-\frac{2}{15}\,m - \frac{1}{35}\,p) + c\,e^2\,\delta\,(\frac{8}{15}\,m - \frac{8}{21}\,p)$, qui eſt la valeur de l'attraction du ſphéroïde ſur M dans l'hypothèſe préſente.

Si on fait $s = 0$, cette quantité deviendra $2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p) + c\,e^2\,\delta\,(\frac{8}{15}\,m - \frac{8}{21}\,p)$ & exprimera l'attraction du même ſphéroïde au pole.

Si on fait $s = 1$, cette quantité deviendra $2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p) + c\,e^2\,\delta\,(\frac{8}{15}\,m - \frac{8}{21}\,p) + c\,e^2\,\delta\,(-\frac{2}{15}\,m - \frac{1}{35}\,p)$, ou $2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p) + c\,e^2\,\delta\,(\frac{6}{15}\,m - \frac{43}{105}\,p)$, & elle exprimera l'attraction du même ſphéroïde à l'équateur.

La différence de ces deux attractions eſt $c\,e^2\,\delta\,(\frac{2}{15}\,m + \frac{3}{105}\,p)$, & cette différence étant comparée à l'attraction au pole, donnera pour le rapport $\frac{c\,e^2\,\delta\,(\frac{2}{15}\,m + \frac{3}{105}\,p)}{2\,c\,e^2\,(\frac{1}{3}\,m - \frac{1}{4}\,p)}$ en négligeant les δ^2 & puiſſances plus élevées, & cette fraction qui ſe réduit à $\delta\left(\frac{\frac{2}{15}\,m + \frac{3}{105}\,p}{\frac{2}{3}\,m - \frac{1}{2}\,p}\right) = \delta\left(\frac{28\,m + 6\,p}{140\,m - 105\,p}\right)$, exprimera ce que l'excès de l'attraction au pole ſur celle à l'équateur, eſt à l'attraction entiere du ſphéroïde.

X L.

PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

Trouver l'attraction suivant la ligne CS *perpendiculaire à* CP *qu'exerce un sphéroïde* PME, *composé d'une infinité de couches elliptiques* KLkl, *toutes de densités & d'ellipticités différentes, sur un corpuscule placé en* M.

Fig. 23. Soient faites les lignes $CM = e$. $CN = r$. $QM = qe$. l'ellipticité de $PME = \delta$. celle de $KL = \gamma$. la densité de la couche quelconque $KkLl = R$. Soient de plus MX la perpendiculaire à l'ellipse PME rencontrant CE en V, & MT la perpendiculaire à l'ellipse semblable à KNL & qui passeroit par M, laquelle perpendiculaire rencontre la ligne CE en S.

Il est démontré par l'Article 35. qu'on aura $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CT$ pour l'attraction qu'exerceroit sur le corpuscule M suivant CT le sphéroïde KNL supposé homogéne; au lieu de cette attraction suivant CT, j'imagine une force suivant CS propre à donner la même direction, lorsqu'elle sera combinée avec la force suivant CM que la force suivant CT: il est clair que cette force suivant CS, devra avoir pour expression $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CS$ pour être équivalente à la force suivant TC, qui a pour expression $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CT$.

Il s'agit donc d'avoir la valeur de CS, ou la distance du point C, au point où la perpendiculaire à l'ellipse semblable à KNL rencontre l'axe CE; mais par la propriété de l'ellipse, cette ligne CS a pour valeur $QM \times \frac{CE^2 - CP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire, $2qe\gamma$ en négligeant les γ^2; multipliant donc $\frac{2cr^5}{5e^5}$ par $2qe\gamma$ valeur de

CS.

CS, on aura $\frac{4cqr^5\gamma}{5e^4}$ pour la force ſuivant CS, équivalente à l'attraction du ſphéroïde KNL ſuppoſé homogéne, ſur M ſuivant CT.

En différenciant cette force, on aura $\frac{4cq}{5e^4}d(r^5\gamma)$ pour la force ſuivant CS de l'orbe KNL, en ſuppoſant que cet orbe ſoit de la denſité 1.

Mais en le ſuppoſant de la denſité R, $\frac{4cq}{5e^4}Rd(r^5\gamma)$ ſera la force de l'orbe $KkLl$, & $\frac{4cq}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma)$ ſera la force du ſphéroïde KNL ſuppoſé hétérogéne.

Si on prend, comme on a fait plus haut, D pour ce que devient la quantité $\int\frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ lorſque $r=e$, on aura $\frac{4cq}{5}D$ pour la force du ſphéroïde propoſé PME, ſur le corpuſcule M ſuivant CS. *C. Q. F. T.*

X L I.

PROPOSITION IX. LEMME IV.

Suppoſant que le ſphéroïde précédent PME *tourne dans un temps tel que la force centrifuge qui en réſulte ſoit infiniment petite par rapport à l'attraction totale du ſphéroïde, on demande la direction* MZ *qui réſulte des attractions qu'exerce ſur* M *le ſphéroïde* PME, *ces attractions étant combinées avec la force centrifuge produite par la rotation du même ſphéroïde.*

Suppoſant que CM exprime la force de l'attraction du ſphéroïde ſuivant CM, CH la force équivalente à l'attraction ſuivant la perpendiculaire CX, & HZ la force centrifuge qui agiroit en M, il eſt évident que MZ ſeroit la direction demandée. Fig. 24.

Soit repriſe maintenant l'expreſſion $2cA - 4c\delta ssA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cssD$ qu'on a trouvée dans l'Article 36. pour

l'expression de l'attraction suivant CM, ou prenant en cette occasion $2cA$ pour exprimer la force de la gravité à l'équateur, ce qui se peut toujours en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Mais comme les forces centrifuges des corps qui tournent dans le même temps sont comme les rayons, on aura CE, ou e à QM, ou qe (on a gardé les dénominations de l'Art. 36.) comme $2cA\varphi$ à $2cA\varphi q$, qui sera l'expression de la force centrifuge en M, ou la force HZ.

Mais la force CH, c'est-à-dire, la force suivant cette direction équivalente à l'attraction suivant CX, vient d'être trouvée dans l'Article précédent $= \frac{4cq}{5}D$; donc $2cAq\varphi + \frac{4cq}{5}D$ est la force totale suivant CH, provenant, tant de l'attraction que de la force centrifuge; donc si on prend CZ à CM comme $2cAq\varphi + \frac{4cq}{5}D$ à $2cA$, ou, ce qui revient au même, si on fait $CZ = \frac{qe(A\varphi + \frac{2}{5}D)}{A}$, ou $= \frac{cr(\frac{2}{5}D + A\varphi)}{2A\delta}$ (en mettant à la place de q, $\frac{cr}{2e\delta}$ qui lui est égal par la propriété de l'ellipse,) MZ sera la direction & la quantité cherchée qui résulte, tant de l'attraction que de la force centrifuge. *C. Q. F. T.*

XLII.

SCHOLIE.

Si l'on imagine maintenant que le sphéroïde précédent ait sa surface couverte de fluide, & qu'on veuille que ce fluide soit en équilibre pendant la rotation donnée au sphéroïde, il est clair que la direction de la force qui fait peser les particules M, laquelle direction est composée de l'attraction & de la force centrifuge, doit être la perpendiculaire même MV à ce sphéroïde; donc il faut que δ, ou l'ellipticité du sphéroïde proposé, soit

telle, que $CV = \left(\frac{\frac{3}{5}D + A\varphi}{2A\delta}\right) cr$, c'eſt-à-dire, que cette valeur de δ doit dépendre de la réſolution de l'équation $\frac{\frac{3}{5}D + A\varphi}{2A\delta} = 1$, ou $2A\delta = \frac{3}{5}D + A\varphi$, équation qui ſera facile à réſoudre auſſi-tôt que l'on connoîtra A & D, c'eſt-à-dire, auſſi-tôt qu'on aura fixé la loi ſuivant laquelle la denſité & l'ellipticité varient du centre à la ſurface extérieure.

S'il étoit reſté dans cette équation la quantité QM, ou CM, ou toute autre quantité variable, il eſt évident que la valeur de δ contiendroit des variables, ce qui ſeroit une abſurdité, puiſque l'ellipticité du ſphéroïde propoſé dont on cherche la figure convenable afin qu'il ſoit en équilibre, doit être une quantité déterminée, & c'eſt cet évanouiſſement de la lettre q qui aſſure la juſteſſe de l'hypothèſe qu'on a priſe, en regardant la figure PME comme une ellipſe.

XLIII.

PROPOSITION X. PROBLÉME V.

Trouver la figure de la Terre ſuppoſée homogéne.

La terre ſuppoſée entierement fluide, ou bien ſolide, mais couverte d'une lame de fluide infiniment mince, eſt, pour l'équilibre, dans le cas qu'on a traité dans la premiere partie de cette Section.

Pour déterminer ſa figure dans cette hypothèſe, il faut chercher ce qu'elle donne pour A & pour D, on remplira la condition de l'homogénéité en faiſant $R = 1$, ce qui donnera, en reprenant l'expreſſion générale de A & de D trouvée Propoſition 7. de cette ſeconde partie de cette Section, $\int Rrrdr = \frac{1}{3}r^3$, & alors faiſant $r = e$, on aura $A = \int \frac{Rrrdr}{ee} = \frac{1}{3}e, \int R\,d(r^5\gamma)$

sera $\int d(r^5 \gamma)$, ou $r^5 \gamma$; donc $D = \int R d \frac{(r^5 \gamma)}{e^4}$ est alors $e \delta$, (car en faisant $r = e$, il faut faire $\gamma = \delta$.)

Substituant donc $\frac{1}{3} e$ pour A, & $e \delta$ pour D dans l'équation $2 A \delta = \frac{2}{5} D + A \varphi$ de l'Article précédent, cette équation deviendra $\frac{2}{3} e \delta = \frac{2}{5} e \delta + \frac{1}{3} e \varphi$, qui donne $\delta = \frac{5}{4} \varphi$, c'est-à-dire, que dans le cas de l'homogénéité, l'ellipticité du sphéroïde doit être à la fraction qui exprime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur comme 5 à 4 ; ainsi $\frac{1}{288}$ étant cette fraction pour la terre, on aura $\delta = \frac{5}{4 \times 288}$ qui donne environ $\frac{1}{230}$ pour l'excès du diamétre de l'équateur de la terre sur l'axe. *C. Q. F. T.*

X L I V.

S C H O L I E.

M. *Newton* a trouvé à peu près ce même rapport par la méthode qu'il a suivi ; mais il est à remarquer que dans cette méthode il se contente de supposer que le méridien est une ellipse sans le prouver, & même sans assurer qu'il en soit une ; il se contente d'égaler le poids de la colomne de fluide qu'il suppose dans l'axe de révolution, au poids de la colomne qui iroit du centre à l'équateur, sans donner rien qui assure de l'équilibre des autres colomnes.

X L V.

PROPOSITION XI. PROBLÉME VI.

Trouver la figure de Jupiter dans la même hypothèse de l'homogénéité.

Il n'est question, pour y parvenir, que de connoître le rapport de la force centrifuge à la gravité, sur l'équateur de Jupiter.

Pour connoître la premiere de ces deux forces, il faut connoître le rayon de l'équateur de Jupiter & le temps de sa rotation, & l'on connoîtra la seconde par le temps de la révolution

de l'un de ses satellites, & par la distance de ce satellite à Jupiter.

T exprimant le temps périodique du satellite qu'on choisit pour cette opération, t celui de la révolution de Jupiter autour de son axe, r le rayon de Jupiter, & R celui de l'orbite du satellite, on aura * $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$ pour exprimer φ, ou le rapport de la force centrifuge à la gravité sur l'équateur de Jupiter.

Mettant donc dans cette formule pour T, 24032′, temps de la révolution du 4[e] satellite de Jupiter, & pour t, 596′, temps de la révolution de Jupiter autour de son axe; l'unité pour r qui est le rayon de Jupiter, & 26, 63 pour R qui est le rayon de l'orbe du satellite, on aura $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$ ou $\varphi = \frac{10}{116}$, & par conséquent δ, (ou l'ellipticité de Jupiter dans le cas de l'homogénéité) $= \frac{5}{4}\,\varphi = \frac{10}{92}$ environ. *C. Q. F. T.*

* Pour démontrer cette formule, soit pris μ pour exprimer un intervale de temps infiniment petit, pendant lequel on cherche quelle seroit la chute du satellite, & on aura $T : cR :: \mu : \frac{\mu c R}{T}$ qui est la valeur du petit arc parcouru par le satellite dans le temps μ: le quarré de cet arc $\frac{\mu^2 c^2 R^2}{T^2}$ étant divisé par le rayon R, c'est-à-dire, $\frac{\mu^2 c^2 R}{T^2}$ exprimera la flèche ou chute du satellite vers Jupiter, laquelle mesure la force de cette planete à la distance R, & par conséquent, $\frac{\mu^2 c^2 R^3}{T^2 r^2}$ pour la force de la même planete à la distance r de son centre, c'est-à-dire, à sa surface.

Mais on trouveroit la force centrifuge en divisant par le rayon r le quarré $\frac{\mu^2 c^2 r^2}{t^2}$ du petit arc que décrit chaque partie de Jupiter dans le temps μ, ce qui donneroit pour cette force centrifuge $\frac{\mu^2 c^2 r}{t^2}$, divisant donc $\frac{\mu^2 c^2 r}{t^2}$ par $\frac{\mu^2 c^2 R^3}{T^2 r^2}$, on aura $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$. *C. Q. F. D.*

XLVI.

PROPOSITION XII. PROBLÊME VII.

Trouver la figure d'une planete qu'on ſuppoſe compoſée de couches elliptiques, dont les ellipticités augmenteroient du centre à la ſurface proportionnellement à la diſtance au centre, & dont les denſités décroîtroient du centre à la circonférence proportionnellement à la même diſtance.

Dans cette hypothèſe, qui eſt la même que celle qui a été traitée Article 39. on aura, en prenant toujours $me - pr$ pour exprimer la denſité R, & $\frac{\delta r}{e}$ pour l'ellipticité γ, $A = (\frac{1}{3} m - \frac{1}{4} p) ee$, $D = (m - \frac{6}{7} p) \delta ee$: ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $\frac{2}{5} D + A\varphi = 2 A \delta$, ou $2 D + 5 A \varphi = 10 A \delta$ trouvée (Article 42.) on aura $\frac{10}{3} me^2\delta - \frac{10}{4} pe^2\delta = 2 me^2\delta - \frac{12}{7} pe^2\delta + \frac{5}{3} me^2\varphi - \frac{5}{4} pe^2\varphi$, ou $\frac{10}{3} \delta m - \frac{5}{2} \delta p = 2 m\delta - \frac{12}{7} p\delta + \frac{5}{3} m\varphi - \frac{5}{4} p\varphi$, ou enfin $\frac{10}{3} \delta m - \frac{5}{2} \delta p - 2 m\delta + \frac{12}{7} p\delta = (\frac{5}{3} m - \frac{5}{4} p) \varphi$, d'où l'on tire $\delta = \varphi \frac{(\frac{5}{3} m - \frac{5}{4} p)}{\frac{4}{3} m - \frac{11}{14} p}$, ou $\delta = \frac{\varphi(140 m - 105 p)}{112 m - 66 p}$ qui exprimera l'ellipticité cherchée du ſphéroïde propoſé auſſi-tôt qu'on fixera le rapport de m à p, ce qui dépend de la différence totale de denſité qu'on ſuppoſe entre la ſuperficie & le centre.

Si on veut, par exemple, que la denſité ſoit double au centre de ce qu'elle eſt à la ſurface, on aura $p = \frac{1}{2} m$, & dans ce cas $\delta = \varphi \left(\frac{175}{158}\right)$, qui devient $\frac{175}{158 \times 288} = \frac{1}{260}$ environ, dans le cas où le ſphéroïde eſt la terre.

Si on veut enſuite que la denſité à la ſurface les $\frac{3}{4}$ de celle au centre, on aura alors $p = \frac{1}{4} m$, & par conſéquent $\delta = \varphi \left(\frac{140 - \frac{105}{4}}{112 - \frac{66}{4}}\right)$

ou $\delta = \varphi \left(\frac{455}{382}\right)$ & qui devient $\frac{455}{382 \times 288} = \frac{1}{242}$ environ dans le cas où le sphéroïde est la terre.

Si on faisoit $p = o$, il est clair qu'on rentreroit dans le cas de l'homogénéité; aussi la formule $\delta = \varphi \left(\frac{140\,m - 105\,p}{112\,m - 66\,p}\right)$ deviendroit en ce cas $\varphi \left(\frac{140}{112}\right)$, c'est-àdire, $\frac{5}{4}\,\varphi$, ainsi qu'on l'a trouvé pour ce cas (Article 43.) *C. Q. F. T.*

XLVII.

PROPOSITION XIII. PROBLÊME VIII.

Trouver la figure d'une planete composée d'une masse fluide qui environne un noyau solide de figure elliptique, dont la densité & l'ellipticité sont données.

Ce cas ne paroît pas d'abord se réduire à la Prop. précédente, dans laquelle la densité & l'ellipticité varioient du centre à la surface; au lieu que dans le cas présent, depuis le centre jusqu'à une distance finie, il n'y a point de variation dans la densité ni dans l'ellipticité, & depuis la superficie extérieure du noyau jusqu'à la surface il n'y a encore aucune variation dans la densité de la masse fluide environnante, ni dans son ellipticité.

Que CA représente le demi axe du noyau, $CH = AG = 1 + f$ sa densité, $CB = e$ le demi axe du sphéroïde, $AF = BE = 1$ la densité de l'orbe environnante, la ligne $HGEF$ est alors l'échelle des densités, qui étoit dans le Prob. général, la courbe dont les ordonnées auroient été R pendant que les abscisses étoient r. Fig. 25.

Pour trouver dans ce cas ci ce que devient la quantité $\int \frac{Rrrdr}{ee} = A$, il faudra calculer cette quantité dans la supposition de $R = 1$ & $r = e$, & en retrancher ce que la même quantité de-

vient lorſque $r = a$, la quantité qui viendra par cette ſouſtraction ſera la partie de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ qui répond à l'orbe fluide environnant, & ſa valeur ſera $\frac{1}{3} e - \frac{1}{3} \frac{a^3}{ee}$, car $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ dans la ſuppoſition de $R = 1$ eſt $\frac{r^3}{3ee}$ qui devient $\frac{1}{3} e$ lorſque $r = e$, & $\frac{1}{3} \frac{a^3}{ee}$ lorſque $r = a$.

Il faudra enſuite calculer $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ en faiſant $R = 1 + f$, & $r = a$, cette quantité ſera alors la partie de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ qui convient au noyau, & ſa valeur ſera $\frac{1}{3} \frac{a^3}{ee} (1 + f)$; ajoutant alors ces deux parties de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$, on aura pour cette quantité, c'eſt-à-dire pour A, $\frac{1}{3} e - \frac{\frac{1}{3} a^3}{ee} + \frac{a^3}{3ee}(1+f) = \frac{1}{3} e + \frac{\frac{1}{3} a^3 f}{ee}$.

Pour trouver de même la quantité D, ou $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ qui répond aux deux parties dont on ſuppoſe la planete compoſée, on fera d'abord $R = 1$, & $\gamma = \delta$, ce qui donnera $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4} = \frac{r^5 \delta}{e^4}$ qui devient $e\delta$ lorſque $r = e$.

On retranchera de cette même quantité ce que $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ devient lorſque $R = 1$ comme auparavant, & que γ au lieu d'être δ eſt l'ellipticité du noyau ſuppoſée $= \alpha$ pendant que $r = a$; ce qui donnera alors $\int \frac{R\alpha(r^5)}{e^4} = \frac{a^5 \alpha}{e^4}$, retranchant cette derniere quantité de la premiere, on aura $e\delta - \frac{\alpha a^5}{e^4}$ pour la partie D qui répond à l'orbe environnant.

Suppoſant

Supposant ensuite dans $\int R\,(r^5\gamma)$, $R = 1 + f$, $\gamma = \alpha$, & $r = a$, on aura $\frac{a^5\alpha}{e^4}(1 + f)$ pour la partie D qui répond au noyau.

Ajoutant ces deux parties de D, on aura pour sa valeur totale $e\delta - \frac{a^5\alpha}{e^4} + \frac{a^5\alpha(1+f)}{e^4} = e\delta + \frac{a^5\alpha f}{e^4}$: substituant enfin les valeurs de A & de D dans l'équation, $\frac{2}{5}D + A\varphi = 2A\delta$, ou $2D + 5A\varphi = 10A\delta$, il viendra $10\delta\left(\frac{1}{5}e + \frac{\frac{1}{5}a^5 f}{ee}\right) - 2e\delta$

$$- \frac{2a^5 f\alpha}{e^4} = 5\varphi\left(\frac{1}{5}e + \frac{\frac{1}{5}a^5 f}{ee}\right), \text{ d'où l'on tire } \delta = \frac{\frac{6a^5 f\alpha}{e^4} + 5e\varphi}{4e + \frac{10a^5 f}{ee}}$$

$$+ \frac{\frac{5a^5 f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^5}{ee}} = \frac{6a^5 f\alpha + 5\varphi e^5 + 5a^5 f\varphi}{4e^5 + 10a^5 fe^2},$$ qui est la même formule que celle que M. *Clairaut* a donné Art. 31. de la seconde Partie de la Théorie de la figure de la Terre, puisqu'elle n'en diffère qu'en ce que, dans la formule de M. *Clairaut*, la quantité e répond à l'unité.

M. *Clairaut* a tiré ce cas d'un Problême qui diffère de celui que je viens de traiter, en ce que, outre qu'il a supposé (figure de la Terre, p. 210.) que les couches varioient du centre jusqu'à une surface extérieure BF ; il a supposé encore un orbe fini de densité homogéne, ce que je n'ai pas fait dans la Prop. précédente, dans laquelle la planete ou le sphéroïde est supposé composé d'une infinité de couches toutes infiniment minces.

XLVIII.

COROLLAIRE I.

Par cette formule on trouvera l'ellipticité du sphéroïde aussitôt qu'on aura donné des valeurs à a, f, α, & réciproquement, si δ est donné par observation, on tirera ce que doit être la densité ou l'ellipticité, ou le rayon du noyau, pour que la planete

ſoit en équilibre ; car deux des trois quantités a, α, f, étant données, la troiſiéme ſe déterminera par le ſecours de l'équation précédente, qui donne la valeur de δ, pourvû que l'on obſerve que α ſoit toujours une quantité de l'ordre de δ, c'eſt-à-dire, une quantité très-petite, que a ſoit plus petit que e, que f n'ait jamais de valeur négative plus grande que l'unité, parce qu'alors le noyau ſeroit d'une denſité négative, ce qui ſeroit abſurde.

XLIX.

COROLLAIRE II.

Si, par exemple, on vouloit que la planete fut plus applatie que dans le cas de l'homogénéité, & que le noyau fut d'une ellipticité égale à celle de la planete, on auroit en ce cas $\delta = \alpha = \frac{5}{4}\varphi (1+p)$, ($p$ étant un nombre poſitif) puiſque $\delta = \frac{5}{4}\varphi$ dans le cas de l'homogénéité : (Article 43.) or l'équation précédente

$$\delta = \frac{\frac{6a^5 f\alpha}{4e} + 5e\varphi + \frac{5a^3 f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^3 f}{ee}}$$

deviendroit dans cette ſuppoſition

$$\frac{5}{4}\varphi(1+p) = \frac{\frac{6a^5 f}{e^4} \times \frac{5}{4}\varphi(1+p) + 5e\varphi + \frac{5a^3 f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^3 f}{ee}},$$

ou

$$5(1+p)e + \frac{25a^3 f}{2ee}(1+p) = \frac{15a^5 f}{2e^4}(1+p) + 5e + \frac{5a^3 f}{ee},$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{5pe}{\frac{15}{2}a^5 e^4 \times \overline{1+p} - \frac{25a^3 p}{2e^2} - \frac{15a^3}{2e^2}},$$

ou

$$\frac{-1}{\frac{3}{2}p\left(\frac{a^3}{e^3} - \frac{a^5}{e^5}\right) + \frac{5a^3}{2e^3} - \frac{3a^5}{2e^5}},$$

qui eſt néceſſairement une valeur négative, puiſque $a < e$, $\frac{a^3}{e^3} < \frac{a^5}{e^5}$, ce qui rend le dénominateur poſitif ; ainſi en ſuivant cette hypothèſe, le noyau

de la planete doit être moins denſe que la matiere qui l'environne.

L.

COROLLAIRE III.

Si on veut que la planete ſoit un orbe d'épaiſſeur finie dont le milieu ſoit entierement vuide, il faut alors que $f = -1$ & on aura alors l'équation $-1 = \frac{-1}{\frac{3}{2}p\left(\frac{a^3}{e^3} - \frac{a^5}{e^5}\right) + \frac{5a^3}{2e^3} - \frac{3a^5}{2e^5}}$, qui étant réſolue donnera la valeur de a, néceſſaire pour l'équilibre de la planete, c'eſt-à-dire, la valeur du rayon de l'eſpace vuide qui ſe trouvera dans cette hypothèſe, lequel rayon eſt l'inconnue.

Il eſt évident que des différentes racines que contiendra l'équation qu'on vient de trouver & qui réſoudroient le Problême, on ne prendra que les poſitives.

L I.

COROLLAIRE IV.

On expliqueroit aiſément, par le même calcul, comment une planete pourroit être allongée ſans que l'équilibre du fluide qui la couvre en fut troublé; car ſi le noyau eſt lui-même allongé, c'eſt-à-dire, ſi α eſt négatif & plus grand que $5\varphi(a^3fe^2 + e^5)$, δ ſera négatif, car la valeur générale de δ étant dans le cas de α négatif, $= \frac{-6a^5f\alpha + 5\varphi e^5 + 5a^3fe^2\varphi}{4e^5 + 10a^3fe^2}$, il eſt évident que cette valeur de δ ſera négative ſi le terme $6a^5f\alpha$ eſt plus grand que les termes $5\varphi e^5 + 5a^3f\varphi e^2$, c'eſt-à-dire, ſi $\alpha > 5\varphi\left(\frac{e^5 + 5a^3fe^2}{6a^3f}\right)$.

LII.

COROLLAIRE V.

Si en ſuppoſant toujours que le ſphéroïde ſoit plus applati que dans le cas de l'homogénéité, on veut que la denſité du noyau ſoit plus grande que celle de la partie fluide, ou fluide & ſolide qui l'entoure, (pourvu que les parties fluides & ſolides de cet orbe ſoient d'une même denſité,) il faudra en ce cas que l'ellipticité du noyau ſoit plus grande que $\frac{\delta ee}{aa}$, & à plus forte raiſon plus grande que δ; car ſi on ſubſtitue dans la valeur de $\delta = \frac{6a^3 f\alpha + 5e^5\varphi + 5a^3fe^2\varphi}{4e^5 + 10a^3fe^2}$ pour α, $\left(\frac{\delta + V}{aa}\right)ee$; cette valeur de δ deviendra $\delta = \frac{6a^3fe^2(\delta + V) + 5e^5\varphi + 5a^3e^2f\varphi}{4e^5 + 10a^3fe^2}$ qui donne $\delta = \frac{5}{4}\varphi + \frac{3a^3fV}{2e^3 + 2a^3f}$; or comme $\frac{5}{4}\varphi$ eſt l'ellipticité dans le cas de l'homogénéité, (Art. 43.) on voit, que ſi l'on veut, que le ſphéroïde qui a un noyau plus denſe que le reſte, c'eſt-à-dire, dans lequel f eſt poſitif, ſoit plus applati que le ſphéroïde homogéne; il faut que V ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, que α qui eſt l'ellipticité du noyau & qu'on a fait $= \frac{(\delta + V)ee}{aa}$, ſoit plus grand que $\frac{\delta ee}{aa}$, & à plus forte raiſon plus grand que δ C. Q. F. D.

LIII.

SCHOLIE.

On voit par ce calcul qu'il ne ſuffit pas pour expliquer comment la terre peut avoir ſes axes dans un rapport plus grand que celui de 230 à 231, de ſuppoſer, comme a fait M. *Newton*, plus de denſité au centre qu'à la ſurface; on voit au contraire

que si la terre avoit un noyau ou sphérique, ou d'une même courbure qu'elle, ou plus applati, pourvu que cet applatissement ne fût pas tel que $\alpha > \frac{\delta ee}{aa}$, les deux axes de la terre seroient entr'eux dans une moindre raison que 230 à 231 ; on verra dans peu ce qui avoit engagé M. *Newton* à croire qu'un plus grand applatissement que celui de 230 à 231 se trouvoit par une plus grande densité au centre.

On voit en même temps que M. *Newton* qui avoit à expliquer pourquoi l'applatissement de Jupiter, donné par les observations, étoit plus petit que celui qui résultoit de son calcul fait dans l'hypothêse de l'homogénéité, n'auroit pas dû prendre une hypothêse aussi dure que celle qu'il a prise en supposant l'équateur de cette planete plus dense que le reste ; il n'avoit qu'à supposer plus de densité au centre qu'à la superficie, & alors il auroit eu le dénouement de sa difficulté, sans être obligé de faire une supposition, qui, si elle avoit lieu pour Jupiter, devroit être bien plus sensible dans la terre ; car si, comme il le prétend, les parties de l'équateur de Jupiter étant plus exposées au Soleil doivent s'être reserrées, pourquoi n'en seroit-il pas arrivé de même à la terre.

Au reste ce que nous venons de dire pour un cas sur la diminution d'applatissement des sphéroïdes qu'apporte le plus de densité des parties voisines du centre, se peut traiter plus généralement comme on va le voir dans l'Article suivant.



L I V.

PROPOSITION XIV. THEORÈME I.

Si la denſité diminue continuellement du centre à la ſurface du ſphéroïde, il ſera moins applati que lorſqu'on le ſuppoſe homogène, pourvû que les ellipticités ne diminuent pas auſſi du centre à la ſurface, ou que ſi elles diminuent, ce ne ſoit pas dans une plus grande raiſon que le quarré des diſtances.

$\frac{\delta e e}{r r}$ ſeroit la valeur de δ ſi on vouloit que l'ellipticité diminuât du centre à la ſurface dans la même raiſon que les quarrés des diſtances augmentent ; donc en ſuppoſant que u ſoit une quantité poſitive, il faudra, en ſubſtituant $\left(\frac{e e}{r r} - u\right)\delta$ pour γ, faire voir que δ doit être néceſſairement plus petit que $\frac{5}{4}\varphi$, la valeur de γ étant ſubſtituée dans $\int R\, d(r^5 \gamma)$ changera cette quantité en $3\delta \int e^2 R r r d r - \delta \int R\, d(r^5 u)$, ou $3 \delta e^2 \int R r r d r - \delta R r^5 u + \delta \int r^5 u\, d R$, & donnera par conſéquent $D = 3 \delta A - \delta G$, en prenant G pour ce que devient $\frac{R u r^5 - \int r^5 u\, d R}{e e}$ lorſqu'on fait $r = e$; mettant donc cette valeur de D dans l'équation générale $10 \delta A - 2 D = 5 A \varphi$ qu'on a trouvée ci-deſſus (Art. 42.) on en tirera $\delta = \frac{5 \varphi}{4 + \frac{G}{2 A}}$ qui ſera néceſſairement plus petit que $\frac{5}{4}\varphi$, pourvû que G ſoit poſitif, ce qui ne ſauroit manquer d'être, puiſque les deux termes que contient la quantité $\frac{R u r^5 - \int r^5 u\, d R}{e e}$ d'où l'on tire G ſont tous les deux poſitifs ; le premier $R u r^5$ l'eſt certainement puiſqu'il eſt affecté

du ſigne +, & le ſecond l'eſt auſſi quoiqu'il ſoit affecté du ſigne —, parce que R décroiſſant lorſque r augmente, dR eſt négatif. *C. Q. F. D.*

L V.

PROPOSITION XV. PROBLEME IX.

Un ſphéroïde composé de couches de différentes denſités & de différentes ellipticités, étant ſuppoſé tourner dans le temps convenable pour l'équilibre du ſphéroïde, trouver la loi que ſuit la peſanteur, c'eſt-à-dire, l'attraction totale dont on a retranché l'effet de la force centrifuge depuis le pole juſqu'à l'équateur.

On a vu dans l'Article 41. que φ repréſentant le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur, $2cA\varphi$ exprimera la force centrifuge à l'équateur, & $2cA\varphi \times \frac{QM}{CE}$ la force centrifuge en un lieu quelconque M, puiſque les forces centrifuges ſont comme les rayons, lorſque les corps tournent dans le même temps.

Décompoſant enſuite la force centrifuge qui agit en M ſuivant la direction QM, afin d'avoir la partie de cette force qui agit dans le ſens du rayon CM, on aura $2cA\varphi \times \frac{QM^2}{CE \times CM}$ qu'on peut prendre, ſans erreur ſenſible, pour $2CA\varphi \times \frac{QM^2}{CM^2}$, ou $2cA\varphi SS$, en nommant S le ſinus de PCM; retranchant donc cette force $2cA\varphi SS$ de $2cA - 4cSS\delta A + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cSSD$ qui exprime (Article 36.) l'attraction du ſphéroïde dans la direction CM, on aura $2cA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + (\frac{6}{5}cD - 4\delta cA - 2c\varphi A)SS$ pour exprimer la force de la peſanteur en un lieu quelconque. *C. Q. F. T.*

On a ſuppoſé dans ce Problême que la direction de la peſanteur étoit celle du rayon CM, & c'eſt ce qui n'eſt pas exactement vrai ; mais ce qui peut être ſuppoſé ſans erreur ſenſible

dans cette occaſion, parce qu'une force décompoſée ſuivant une direction qui diffère infiniment peu de celle du rayon, donne, par cette décompoſition, une force qui n'en diffère que d'un infiniment petit du ſecond ordre.

Si on retranche l'expreſſion précédente de celle qui exprime la peſanteur ou l'attraction au pole, laquelle eſt $2cA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD$, il viendra pour la différence $(4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6}{5}cD)SS$, ce qui apprend que la diminution de la peſanteur depuis le pole juſqu'à l'équateur, eſt proportionnelle au quarré du coſinus de la latitude; car on peut prendre, ſans erreur ſenſible, l'angle PCM pour le complement de la latitude, lorſque le ſphéroïde diffère très-peu d'une ſphére.

L V I.

PROPOSITION XVI. THEOREME II.

E étant l'ellipticité qu'auroit une planete ſuppoſée en équilibre ſi elle étoit homogéne, P la peſanteur des corps au pole de cette planete, Π la peſanteur à l'équateur, δ l'ellipticité de la même planete dans la ſuppoſition qu'elle ſoit compoſée comme le ſphéroïde de l'Art. 10. d'une infinité de couches de denſités & d'ellipticités différentes; je dis qu'on aura toujours $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2E - \delta$, *quel que ſoit l'arrangement & la forme des couches dont elle eſt compoſée.*

Faiſant $S = 1$ dans la quantité précédente $(2cA\varphi - \frac{6}{5}cD + 4cA\delta)SS$, on aura $2cA\varphi - \frac{6}{5}cD + 4cA\delta$ pour exprimer $P - \Pi$, ou l'excès de la peſanteur au pole ſur celle à l'équateur; diviſant donc cette quantité par Π, c'eſt-à-dire, par $2cA$, qui ſuffit dans cette occaſion pour exprimer la peſanteur à l'équateur, on aura $2\delta + \varphi - \frac{3}{5}\frac{D}{A} = \frac{P - \Pi}{\Pi}$; mais on a vu dans l'Article 41. qu'afin que le ſphéroïde pût ſubſiſter en équilibre, il falloit que $10\delta A - 2D = 5A\varphi$; donc au lieu de

3

$\frac{3D}{5\Delta}$ on peut mettre $3\delta - \frac{1}{2}\varphi$, ce qui changera la quantité $2\delta + \varphi - \frac{3D}{5\Delta}$ en $\frac{5}{4}\varphi - \delta$; mais $\frac{5}{4}\varphi$ est la valeur de l'ellipticité qu'auroit le sphéroïde s'il étoit homogéne ; donc $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2\varepsilon - \delta$. *C. Q. F. D.*

LVII.

SCHOLIE.

Il suit de ce calcul, qu'en supposant la terre homogéne & composée comme les sphéroïdes précédens, si son applatissement se trouve plus grand que $\frac{1}{230}$ ainsi que les observations faites au nord & au sud l'ont donné, la diminution totale de la pesanteur depuis le pole jusqu'à l'équateur, doit être autant au-dessous de la fraction $\frac{1}{230}$, que cette même fraction est surpassée par celle qui exprime l'applatissement trouvé par les observations. Ainsi en supposant, comme il le paroît par les observations que je viens de citer, que l'ellipticité de la terre soit la $\frac{1}{174}$, le raccourcissement du pendule du pole à l'équateur devroit être de $\frac{1}{174} - \frac{1}{230} = \frac{56}{40020} = \frac{1}{714}$ environ, ce qui se trouve très-différent de ce que les observations ont appris, puisqu'on voit par ces observations que ce même raccourcissement surpasse la fraction $\frac{1}{230}$ au lieu d'être plus petit.

Cette conclusion est bien contraire à celle de M. *Newton*, qui, en trouvant que les observations faites sur le pendule donnoient son raccourcissement du pole à l'équateur plus grand que $\frac{1}{230}$, vouloit que la terre fût en même temps plus applatie que cette

même fraction ; mais ce sentiment de M. *Newton* étoit fondé sur ce qu'il pensoit que dans tout sphéroïde en équilibre, la pesanteur doit être toujours en raison renversée de la distance au centre, proportion qui n'est vraie que lorsque le sphéroïde est homogéne ; on peut voir pag. 253. du Livre de M. *Clairaut*, les passages de M. *Newton* qui prouvent qu'il s'étoit fondé sur cette supposition, sans en avoir vû la vérité que pour le cas de l'homogénéité.

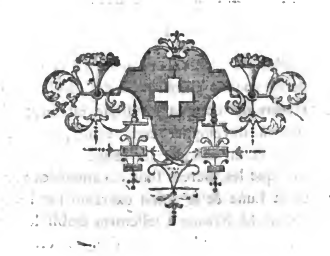
La conclusion à laquelle conduit le calcul ci-dessus, rend la théorie précédente assez difficile à concilier avec les observations qui concernent la figure de la terre ; car l'hypothèse dans laquelle on regarde la terre supposée hétérogéne comme composée de couches orbiculaires est bien vraisemblable, & il seroit bien dur d'avoir recours à l'expédient de supposer l'équateur plus dense que le reste, & à supposer les différens rayons qui vont de la surface au centre de différentes densités, ce qui d'ailleurs pourroit bien ne pas conduire encore à trouver le rapport desiré entre l'applatissement de la terre, & le raccourcissement du pendule du pole à l'équateur.

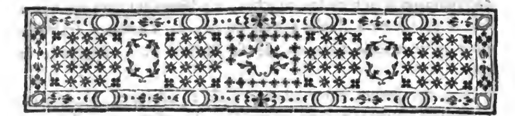
Dans les calculs qu'a employé M. *Clairaut*, il a supposé à la vérité la forme elliptique aux couches extérieures, & l'on pourroit craindre que des couches d'une autre forme que l'ellipse, ne donnassent quelque changement dans le résultat : c'est donc une ressource pour ceux qui voudront concilier la théorie de l'attraction avec les observations de la figure de la terre dans le systême de M. *Newton*, sans joindre aucune autre force à celle de l'attraction ; la recherche est digne des plus grands Géométres par la difficulté, mais on a tout lieu de craindre qu'elle ne conduise à aucun résultat plus propre à concilier les observations avec cette théorie, si on ne veut pas donner aux couches qui composent la terre un arrangement qui paroisse trop controuvé.

L'hypothèse des couches elliptiques a une grande raison pour être préférée aux autres, c'est que ces courbes sont celles qui

conviennent à toutes les couches, en ſuppoſant qu'elles ayent été originairement fluides ; c'eſt ce que M. *Clairaut* a fait voir dans le quatriéme Chapitre de ſa Théorie de la figure de la terre.

Je n'entreprends point ici d'éclaircir ce Chapitre, parce qu'il dépend des mêmes principes que ceux dont j'ai parlé précédemment, & que les perſonnes qui auront eu tous les ſecours que je leur ai donné par les détails dans leſquels je ſuis entrée, entendront facilement ce Chapitre dans l'ouvrage même.





SECTION V.

DES MARÉES.

I.

IL ne s'agit plus de rechercher quelle eſt la vraie cauſe des marées ; elle eſt connue aujourd'hui des Phyſiciens-Géométres avec toute la certitude dont la Phyſique eſt ſuſceptible : il ne reſte à préſent qu'à développer cette cauſe, à en tirer toutes les conſéquences, & en calculer les effets.

On ſçait aſſez que les marées ſont occaſionnées par l'inégalité de l'action que la Lune & le Soleil exercent ſur les parties qui compoſent la terre. M. *Newton* a tellement établi le méchaniſme de cette cauſe, qu'il n'eſt plus permis d'en douter. Il faut cependant avouer que ce grand homme ne s'eſt pas donné la peine d'entrer là-deſſus dans le détail que l'importance de la matiere exigeoit. L'Académie des Sciences a ſi bien ſenti à cet égard l'intérêt du Public, qu'elle n'a pas héſité de propoſer la queſtion des marées pour le Prix de 1740. prévoyant bien que cela encourageroit les ſavans à mettre le ſyſtême de M. *Newton* dans tout ſon jour, & à le perfectionner autant que l'incertitude de quelques circonſtances requiſes pourroient le permettre. On peut dire que jamais ſon attente n'a été mieux remplie que cette fois-là : Les ſoins de l'Académie, & ſes heureux auſpices, nous ont procuré

trois belles Piéces fort étendues, toutes fondées sur les principes de M. *Newton* : elles sont de Messieurs *Daniel Bernoulli*, *Mac-Laurin* & *Euler*. Je me suis sur tout attachée à lire celle de M. *Bernoulli*, dans laquelle il m'a paru trouver plus d'ordre, de netteté & de précision ; & j'espére que le Lecteur me saura gré, si pour Commentaire de notre Auteur sur cette matiere, je lui donne un abrégé du Traité de M. *Bernoulli* ; ce que je ne pourrai cependant faire, sans omettre plusieurs propositions essentielles, ni sans changer les démonstrations de celles que j'alléguerai.

I I.

Il est bon de n'examiner d'abord que l'action d'un seul luminaire, & de commencer par celle du Soleil, parce que nous en connoissons la quantité de matiere relativement à celle de la terre. On remarquera d'abord que le Soleil attire la terre, & que cette force est contre-balancée pour la totalité par la force centrifuge qui répond au mouvement annuel de la terre, lequel mouvement nous considérerons comme parfaitement uniforme, & circulaire autour du Soleil : mais ce qui est vrai pour la totalité, ne peut pas être appliqué à chaque particule de la terre, c'est-à-dire, qu'on ne sauroit supposer la force centrifuge de chacune de ces particules égale à la force avec laquelle la même particule est attirée vers le Soleil, puisque la force centrifuge est la même pour chacune d'elles, pendant que les particules de la terre qui sont plus proches du Soleil, en sont attirées plus fortement que celles qui en sont plus éloignées. Ainsi si la distance de la terre au Soleil est égale à 22000 demi-diamétres terrestres, & si les forces attractives suivent la raison réciproque des quarrés des distances, les forces attractives pour le point de la terre qui est le plus proche du Soleil, pour le centre de la terre & pour le point de la terre qui est le plus éloigné du Soleil, ces trois forces, dis-je, seront à peu près comme 11001, 11000 & 10999, pendant que la force centrifuge de la terre sera

pour chaque point de la terre comme 11000 ; ſi nous retranchons enſuite pour chacun de ces trois points la force centrifuge de la force attractive, il nous reſtera 1, 0 & — 1, ce qui marque que les deux extrémités du diamétre de la terre qui eſt dirigé vers le Soleil, ſouffrent des forces égales en ſens contraire, qui tendent à y éloigner les particules depuis le centre de la terre, ou bien à les élever.

Si dans le même diamétre nous prenons au dedans de la terre deux points également éloignés du centre, ces deux points ſouffriront encore une pareille force égale de part & d'autre, qui tend à éloigner les particules de ce centre ; mais cette force diminuera en même raiſon que la diſtance au centre de la terre. J'appellerai ce diamétre terreſtre, dont la direction paſſe par le centre du Soleil, *l'axe Solaire* de la terre ; ſi nous conſidérons à préſent l'équateur qui répond à cet axe, nous voyons que chaque point pris dans le plan de cet équateur, peut être cenſé également éloigné du centre du Soleil, & qu'ainſi aucun point de ce plan, ne ſe reſſentira de l'inégalité entre la force centrifuge & la force attractive, & ne perdra rien de ſa peſanteur naturelle vers le centre de la terre. Si l'on conçoit donc deux canaux, l'un tout le long du demi axe ſolaire, & l'autre tout le long du rayon de ſon équateur, qui communiquent enſemble au centre de la terre & qui ſoient remplis d'un fluide, il ſera élevé dans le premier canal & deſcendra dans l'autre, & la choſe ſera ainſi pour l'un & l'autre demi axe ſolaire. C'eſt ici la premiere ſource du flux & reflux de la mer.

I I I.

On remarquera en ſecond lieu, que dans le canal de l'un des demi axes ſolaires, chaque partie du fluide eſt attirée directement vers le Soleil ſuivant la direction du canal, au lieu que dans l'autre canal cette force agit avec une petite obliquité ; il faut donc décompoſer cette force en deux autres, l'une perpen-

diculaire au canal, & l'autre paralléle ; la premiere peut encore être censée parfaitement détruite par la force centrifuge, parce que la différence de cette force à la force entiere, ne fait qu'une espéce d'infiniment petit du second ordre ; mais la seconde force tire chaque particule dans ce canal directement vers le centre de la terre, & se joint à l'action de la pesanteur naturelle ; cette petite force n'existe point dans le canal du demi axe solaire, & ainsi le fluide descendra encore par cette raison dans le canal de l'équateur solaire, & élevera celui de l'autre. C'est-là la seconde source du flux & reflux de la mer.

I V.

Les deux causes que nous venons d'exposer ne sauroient manquer d'élever les eaux vers les deux poles de l'axe solaire, & de les déprimer dans chaque point de l'équateur solaire, quelques hypothèses qu'on veuille faire par rapport aux autres circonstances qui nous restent à considérer, & on voit que la figure de la terre, que la seule pesanteur naturelle lui fait prendre, est un peu changée par l'action du Soleil, & qu'elle en est allongée de maniere que son axe solaire en devienne plus long, & le diamétre de l'équateur solaire plus court. Ce petit changement de la figure de la terre cause aussi-tôt une petite variation dans la pesanteur naturelle, tant en direction qu'en force, & nous démontrerons ci-dessous que cette variation conspire avec les deux premieres causes immédiates à faire le même effet, & cela dans une proportion ni assez grande pour négliger les deux premieres causes, ni assez petite pour la négliger elle-même. Voilà la troisiéme source des marées la plus fâcheuse pour le calcul, & dont l'effet dépend de plusieurs hypothèses & circonstances, qu'on ne pourra peut être jamais déterminer au juste.

V.

La terre ainsi allongée conserveroit la figure sans qu'il y eut

aucun flux & reflux, si elle n'avoit point de mouvement journalier : c'est donc la rotation de la terre autour de son axe, conjointement avec son allongement, qui produisent alternativement un baissement & élévation des eaux de la mer. Si l'axe de rotation étoit le même que l'axe solaire, il n'y auroit aucun mouvement dans les eaux de la mer, parce que chaque point conserveroit constamment une même distance depuis les poles solaires, pendant que la terre feroit sa révolution ; mais comme ces deux axes font un angle, il est facile de voir que chaque point de la surface de la terre s'approche & s'éloigne alternativement des poles solaires, & cela deux fois pendant une révolution, & que les eaux s'éléveront dans ce point jusqu'à ce qu'il en soit le plus proche, & qu'ensuite elles se baisseront jusqu'à ce qu'il en soit le plus loin : l'intervalle entre deux marées est de 12 heures solaires, en tant que les marées sont produites par l'action du soleil.

V I.

Ce que nous venons de dire par rapport au Soleil doit être appliqué dans toute son étendue à la Lune, & tous les phénomenes des marées nous font voir évidemment que l'effet de cet astre est considérablement plus grand que celui du Soleil : si on connoissoit avec une précision suffisante le rapport entre les masses de la Lune & du Soleil, il seroit facile d'en déterminer le rapport entre leurs effets ; mais ce rapport entre les masses est assez incertain, & ne sauroit être déterminé que par le moyen de quelques observations sur les marées, ou bien de quelques irrégularités du mouvement de la Lune, ou par quelques autres moyens semblables : Cependant on ne sera pas surpris que l'action de la Lune surpasse considérablement celle du Soleil, malgré la masse énorme de celui ci, quand on considérera la grande proximité qu'il y a entre la Lune & la terre, & que les effets des deux luminaires sont en raison réciproque cubique des

distances.

distances à la terre, & en raison simple de leurs masses, comme nous verrons ci-dessous. A l'égard de cette cause l'intervale entre deux marées sera de 12 heures lunaires, ou d'environ 12^h 25' solaires.

V I I.

En combinant les deux actions du Soleil & de la Lune sur les eaux de la mer, nous voyons qu'il y a à proprement parler continuellement deux espéces de marées, qu'on pourra appeller *marées solaires* & *marées lunaires*, & qui peuvent se former indépendemment les unes des autres ; ces deux sortes de marées paroissent en se confondant n'en faire qu'une seule espéce, mais qui devient sujette à de grandes variations. Je dis que ces marées considérées comme simples, auront toujours les apparences d'être extrêmement variables ; car dans les syzigies les eaux sont élevées & baissées en même temps par l'un & l'autre luminaire, & dans les quadratures les eaux sont élevées par le Soleil, là où elles se baissent à l'égard de la Lune, & réciproquement elles se baissent à l'égard du Soleil au même moment qu'elles s'élévent à l'égard de la Lune ; desorte que par ces effets, tantôt conspirans, tantôt opposés, il résulte des variations très-sensibles, tant par rapport à l'heure des marées que par rapport à leur hauteur. Toutes ces variations, que la combinaison des deux espéces de marées indique pour toutes les différentes circonstances, répondent parfaitement aux observations qu'on a faites sur cette matiere, desorte que la théorie en est entierement confirmée, ou plutôt démontrée. Voilà l'explication physique de la vraie cause des marées ; c'est à la Géométrie à la mettre dans un plus grand jour ; la matiere est extrêmement riche, & je passerois les bornes d'un Commentaire, si je voulois la traiter dans toute son étendue ; je me contenterai d'en exposer les principes les plus essentiels.

V I I I.

Il me paroît sur tout nécessaire de faire voir que la cause des

marées telle que nous l'avons exposée, n'a rien de disproportionné aux effets que nous prétendons en déduire; on pourroit apparemment aller plus loin, & démontrer géométriquement une entiere égalité entre les effets & leurs causes, sans les grandes irrégularités des terres & de l'Océan, & si on connoissoit en même temps toutes les circonstances par rapport à l'intérieur de la terre que demande une détermination précise. Il s'agit donc de rechercher de combien les eaux de la mer sont élevées près des poles de l'axe solaire de la terre par l'action du Soleil, c'est-là le Problême fondamental: mais cette question dépend de plusieurs circonstances, à la connoissance desquelles il n'y a aucune apparence de pouvoir jamais parvenir. Il faudroit connoître toutes les variations des densités de la matiere de la terre depuis la surface jusqu'au centre. Il faudroit ensuite sçavoir, en supposant les densités sensiblement inégales, si l'intérieur de la terre doit être considéré comme un globe solide couvert d'eau, ou bien comme fluide: dans le premier cas le globe ne sauroit changer sa figure; mais dans le second cas chaque couche de la terre change sa figure, & fait changer celle de toutes les autres, desorte qu'à la surface de la terre les eaux sont plus ou moins élevées suivant les différentes hypothèses. Il faut même avouer l'insuffisance de l'analyse pour calculer les résultats, & qu'on est obligé dans la généralité du Problême d'envisager la chose sous une face qui ne convient pas exactement avec sa nature, ce qui fait qu'en pressant trop les formules, on en tire des Corollaires peu conformes aux apparences de la vérité. Il faudroit encore connoître la figure & la grandeur de l'Océan. Tout cela influe sur notre question.

I X.

Les réflexions que je viens de faire excusent suffisamment M. *Newton* de n'avoir considéré que le cas le plus simple, qui est de supposer la terre homogéne dans toute son étendue; cette supposition rend non seulement les calculs praticables, mais elle a

encore ceci de commode, qu'il n'eſt pas néceſſaire en ce cas de faire aucune diſtinction entre l'hypothèſe d'une entiere fluidité de la terre ou de ſa ſolidité, pourvu qu'on la ſuppoſe toute inondée : auſſi tous ceux qui ont réſolu ce Problême s'accordent-ils entierement pour ce dernier cas. Si donc la terre eſt compoſée d'une matiere d'une même denſité depuis la ſurface juſqu'au centre, & que la ſeule peſanteur naturelle agiſſe ſur toutes les parties de cette maſſe, il eſt évident que la terre en prendra une figure parfaitement ſphérique. Mais ſi enſuite l'action du Soleil ſurvient, cette ſphère ſera changée en ſphéroïde, & on conſidère ce ſphéroïde comme elliptique, tel que chaque méridien faſſe une ellipſe dont la différence des axes ſoit extrêmement petite ; il faut conſidérer la figure des meridiens ſolaires comme connue, puiſque ſans cela on ne ſauroit déterminer la différence entre les peſanteurs naturelles pour la ſphère & pour le ſphéroïde. Cependant on peut démontrer qu'en ſuppoſant une figure elliptique, cette figure n'eſt pas changée par l'action du Soleil, & qu'ainſi le ſphéroïde eſt néceſſairement elliptique. Par cette méthode on peut démontrer que preſque toutes les petites forces perturbatrices, comme, par exemple, la force centrifuge, qui répond au mouvement journalier de la terre, changent la figure ſphérique en ſphéroïde elliptique. Il eſt queſtion à préſent de déterminer la différence entre les deux demi axes de l'ellipſe dont il s'agit, différence qui eſt la même que celle du demi axe ſolaire de la terre & du rayon de l'équateur ſolaire. Pour nous mettre en état de la déterminer, j'alléguerai ici quelques propoſitions de M. *Newton* ſur l'attraction des corps homogénes, ſphéroidiques & elliptiques.



X.

LEMME I.

Fig. 1. *Soit* BGDH *une ellipse presque circulaire, qui par sa révolution autour du grand axe* BD *forme un sphéroïde homogéne; si on suppose le petit demi axe* $GC = b$, *le grand demi axe* $BC = b + c$; *si on nomme ensuite* g *l'attraction d'une sphére homogéne avec le sphéroïde, & dont le rayon est* $= b$ *pour un point pris dans la surface de la sphére; je dis que l'attraction du sphéroïde pour le pole* B *ou* D *sera* $= g + \frac{c}{5b} g$.

C'est la Prop. 6. du Chap. 2. du Traité de M. *Daniel Bernoulli* sur le flux & le reflux de la mer, & on remarquera que j'appelle ici *g* ce que ce Géométre exprime par $\frac{2}{3}\, n \mu b$.

XI.

LEMME II.

L'attraction du même sphéroïde pour un point G *pris dans l'équateur solaire sera* $= g + \frac{2c}{5b} g$.

C'est la Proposition suivante de M. *Bernoulli.*

XII.

LEMME III.

Dans le même sphéroïde l'attraction pour un point quelconque pris dans un diamétre quelconque, est à l'attraction pour l'extrémité du même diamétre, comme la distance du premier point au centre du sphéroïde est au demi diamétre.

C'est le troisiéme Corollaire de la Prop. 91. du premier Livre des Principes de M. *Newton.*

XIII.

PROBLÉME.

Trouver la différence entre le demi axe solaire BC *& le rayon de son équateur* GC.

SOLUTION.

Qu'on imagine les deux canaux BC & GC, qui communiquent ensemble au centre C, remplis d'eau : l'équilibre qu'il y aura entre les eaux des deux canaux, demande que la pression totale des eaux soit de part & d'autre égale ; il n'y aura donc qu'à chercher ces pressions totales, & les supposer ensuite égales. Soit à présent $GC = b$, $BC = b + \zeta$; qu'on prenne dans le demi axe BC deux points infiniment proches M & m, & qu'on suppose $CM = x$, $Mm = dx$: nous aurons en vertu de l'Article dixiéme, la pesanteur au point B vers le centre $C = g + \frac{\zeta}{5b} g$; ensuite l'Article douziéme donne la même pesanteur pour le point $M = \frac{x}{b + \zeta} \times \left(g + \frac{\zeta}{5b} g\right)$, & cette expression peut être censée $= \left(\frac{x}{b} - \frac{4\zeta x}{5bb}\right) g$. Soit à présent la pesanteur solaire pour le centre C, c'est-à-dire, la pesanteur qui anime une particule placée au centre C vers le centre du Soleil $= \gamma$; & qu'on nomme B la distance entre ces deux centres, & la distance du point M jusqu'au centre du Soleil sera $= B - x$; ainsi la pesanteur solaire pour le point M sera $= \left(\frac{B}{B-x}\right)^2 \gamma$ ou bien $= \gamma + \frac{2x}{B} \gamma$. De cette force solaire il faut retrancher la force centrifuge qui répond au mouvement annuel de la terre, & qui est pour chaque point de la terre $= \gamma$, après quoi il reste une petite force actuelle $\frac{2x}{B} \gamma$, avec laquelle la petite colomne Mm est animée vers B, & la force totale qui anime cette petite colomne vers C sera $= \left(\frac{x}{b} - \frac{4\zeta x}{5bb}\right) g - \frac{2x}{B} \gamma$. Si on multiplie cette force par la masse Mm, qu'on peut exprimer par dx à cause de l'homogénéité de la terre, nous aurons la pression de la petite colomne

Fig. 2.

vers le centre $C = \frac{g\,x\,d\,x}{b} - \frac{4\,g\,\zeta\,x\,d\,x}{5\,b\,b} - \frac{2\,\gamma\,x\,d\,x}{B}$. Si on prend l'intégrale de cette quantité ſans ajouter aucune conſtante, nous aurons $\frac{g\,x\,x}{2\,b} - \frac{2\,g\,\zeta\,x\,x}{5\,b\,b} - \frac{\gamma\,x\,x}{B}$: faiſons enfin $x = B\,C = b + \zeta$ & nous aurons en négligeant les quantités cenſées infiniment petites du ſecond ordre, le poids total de la colomne entiere $B\,C$ vers le centre $C = \frac{1}{2}\,g\,b + \frac{3}{5}\,g\,\zeta - \frac{\gamma\,b\,b}{B}$.

Pour trouver à préſent la preſſion totale du fluide $G\,C$, nous remarquerons qu'en vertu du ſecond Lemme la peſanteur au point G doit être exprimée par $g + \frac{2\,\zeta}{5\,b}\,g$: ſi on fait après cela $C\,N = y$, $N\,n = d\,y$, on aura pour le point N la peſanteur $= \frac{y}{b} \times \left(g + \frac{2\,\zeta}{5\,b}\,g\right)$: quant à la peſanteur ſolaire γ qui ſe fait vers le centre du Soleil, il faut la réſoudre en deux autres, dont la premiere agit parallélement à $B\,C$ qui n'entre plus en ligne de compte, tant parce qu'elle peut encore être cenſée $= \gamma$, & qu'ainſi elle eſt détruite par la force centrifuge du mouvement annuel de la terre, que parce qu'elle agit perpendiculairement contre les bords du canal ; il ne reſte donc à conſidérer que la peſanteur ſolaire en tant qu'elle agit dans chaque point N dans la direction $N\,C$, & qui eſt $= \frac{B}{y}\,\gamma$: ſi nous ajoutons cette petite force à celle de la peſanteur, nous aurons la force totale qui anime la petite colomne $N\,n$ vers le centre C, & qui par conſéquent ſera $= \frac{g\,y}{b} + \frac{2\,g\,\zeta\,y}{5\,b\,b} + \frac{\gamma\,y}{B}$. Si nous multiplions cette force accélératrice par la maſſe de la petite colomne $N\,n$ ou par $d\,y$, nous aurons la preſſion de cette colomne vers le centre $C = \frac{g\,y\,d\,y}{b} + \frac{2\,g\,\zeta\,y\,d\,y}{5\,b\,b} + \frac{\gamma\,y\,d\,y}{B}$. Si on prend l'intégrale de cette quantité & qu'enſuite on faſſe $y = b$, on aura

enfin le poids total de la colomne entiere GC vers le centre $C = \frac{1}{2} g b + \frac{1}{3} g \zeta + \frac{\gamma b b}{2 B}$. Si nous faisons enfin cette pression totale égale à la précédente qui répond au canal BC, nous aurons $\frac{1}{2} g b + \frac{1}{3} g \zeta + \frac{\gamma b b}{2 B} = \frac{1}{2} g b + \frac{1}{3} g \zeta - \frac{\gamma b b}{B}$ ou $\zeta = \frac{15}{4} \times \frac{\gamma}{g} \times \frac{b}{B} \times b$. Cette expression est la même que celle que donne M. *Bernoulli*, pour ce cas au §. 8. Chap. 4.

X I V.

Comme la quantité γ est un peu variable en considérant l'excentricité de l'orbite de la terre, il sera plus convenable d'exprimer le rapport $\frac{\gamma}{g}$ par celui des masses du Soleil & de la terre; si on exprime ces masses par μ & m, on aura $\frac{\gamma}{g} = \frac{\mu}{m} \times \frac{b b}{B B}$ & $\zeta = \frac{15}{4} \times \frac{\mu}{m} \times \frac{b^3}{B^3} \times b$. Cette expression nous apprend que les élévations des eaux exprimées par ζ, sont en raison réciproque cubique des distances de la terre au Soleil. Il paroît d'abord par l'une & l'autre de ces expressions, que la valeur de ζ en nombres devroit être assez incertaine comme dépendante de la distance du Soleil ou de sa parallaxe, laquelle n'est pas encore bien établie; mais la façon dont on peut se servir pour déterminer les rapports $\frac{\gamma}{g}$ & $\frac{\mu}{m}$ redressent cette incertitude, de maniere que la quantité ζ ne dépend plus que de la parallaxe de la Lune qu'on connoît assez au juste.

X V.

La réflexion que je viens de faire m'engage à donner une troisiéme expression pour la valeur de ζ: On remarquéra donc que g dénotant la pesanteur naturelle (car l'attraction de la sphere

inſcrite dans le ſphéroïde, ne différe pas ſenſiblement de celle de tout le ſphéroïde) la peſanteur moyenne de la Lune vers la terre ſera $= \frac{bb}{AA} g$, (en entendant par A la diſtance moyenne de la Lune à la terre, qu'on connoît aſſez exactement;) & cette peſanteur $\frac{bb}{AA} g$ eſt à la peſanteur de la terre vers le Soleil ou à γ, comme la force centrifuge de la Lune à la force centrifuge de la terre. Soit le temps périodique moyen de la Lune $= t$, celui de la terre $= T$, la diſtance moyenne de la Lune au centre de gravité du ſyſtême de la terre & de la Lune $= nA$, & qu'on entende par B la diſtance moyenne de la terre au Soleil, on ſçait par les Théorémes de M. *Hughens*, que les forces centrifuges de la Lune & de la terre dans leurs orbites ſont comme $\frac{nA}{tt}$ à $\frac{B}{TT}$: nous aurons donc cette analogie $\frac{bb}{AA} g : \gamma :: \frac{nA}{tt} : \frac{B}{TT}$, laquelle donne $\frac{\gamma}{g} = \frac{B}{nA} \times \frac{bb}{AA} \times \frac{tt}{TT}$. Si nous ſubſtituons cette valeur dans l'équation de l'Article 13. nous aurons $\mathfrak{C} = \frac{15}{4} \times \frac{b^3}{nA^3} \times \frac{tt}{TT} \times b$.

XVI.

C'eſt enfin cette équation qui nous apprend au juſte la valeur de $\mathfrak{C}$ pour la diſtance moyenne du Soleil : la valeur $\frac{tt}{TT}$ eſt ſuivant M. *Newton*, $= \frac{1000}{178725}$; $b = 19695539$ pieds, ſuivant la meſure de M. *Caſſini*; $\frac{b}{A} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ ſuivant M. *Newton*. Quant au coëfficient n, il dépend de la proportion de la maſſe de la terre à celle de la Lune; M. *Newton* ſuppoſe la premiere 39 fois plus grande que l'autre, fondé ſur la différence des marées dans les ſyzigies & dans les quadratures, & là-deſſus il faut faire $n = \frac{39}{40}$:

M.

M. *Daniel Bernoulli* a beaucoup plus approfondi cette question extrêmement utile pour calculer plusieurs perturbations lunaires, & plusieurs autres petits mouvemens ; il a fait voir qu'il falloit plutôt déduire la masse de la Lune de quelques inégalités sur les intervalles des marées, & cette considération nous apprend que la masse de la Lune est plus petite en raison à peu près de 5 à 9, desorte que la masse de la terre doit être à celle de la Lune environ comme 70 à 1, & qu'il faut par conséquent faire $n = \frac{70}{71}$. Mais pour notre question cette discussion est assez superflue : car si on suppose $n = \frac{39}{40}$ on trouve C d'un pied onze pouces, & un huitiéme de pouce, & si on suppose $n = \frac{70}{71}$ on trouve environ $2\frac{1}{2}$ lignes de moins.

XVII.

Voilà donc quel seroit l'excès de la plus grande hauteur de la mer par dessus la plus petite, si toute la terre étoit fluide & homogéne avec les eaux de la mer, en tant que cet excès est produit par l'action inégale du Soleil sur les parties de la terre. On peut ensuite former une infinité d'autres hypothèses sur la conformation de la terre & sur l'Océan, dont les unes rendent la valeur moyenne de C plus grande, & d'autres plus petite. Cependant nous voyons déja par avance que ladite élévation d'environ deux pieds, n'a rien de disproportionné aux phénoménes que nous en voulons déduire : car nous montrerons que la valeur de C étant d'environ deux pieds pour l'action solaire, elle doit être d'environ cinq pieds pour l'action lunaire, & ces deux causes se joignant ensemble dans les sizigies, nous aurons sept pieds d'élévation pour l'état moyen, & plus de 8 pieds si la Lune est dans son périgée. Selon M. *Newton* l'action lunaire est plus grande, parce qu'il suppose plus de masse à la Lune, & selon lui l'action des deux luminaires réunie sous les circonstances les

plus favorables, pourroit élever les eaux jusqu'à la hauteur de 12 ou 13 pieds. Nous allons traiter cette question avec un peu plus de détail.

XVIII.

Il s'agit donc à présent d'examiner quelle sera la valeur de $\mathfrak{C}$ par rapport à l'action de la Lune : quoique la masse de la Lune soit extrêmement petite par rapport à celle du Soleil, on ne doit pas être surpris qu'elle puisse faire un effet considérablement plus grand ; car la proximité de la Lune avec la terre fait que la pesanteur des parties de la terre vers la Lune est extrêmement inégale relativement au Soleil. En un mot, on voit que la même expression que nous avons donnée à l'Art. 14. servira encore par rapport à la Lune, en entendant par μ la masse de la Lune, & par B sa distance à la terre : Ainsi la détermination absolue de l'effet de la Lune ne dépend que du rapport de sa masse à celle de la terre : avant que d'alléguer les raisons qui peuvent nous donner quelque lumiere sur ce rapport, il ne sera pas hors de propos de réduire le tout à la densité de la Lune par rapport à celle de la terre ; le volume de la terre étant environ $48\frac{1}{2}$ fois plus grand que celui de la Lune, si nous supposons la densité de la terre à celle de la Lune comme d à δ, nous aurons $\frac{\mu}{m} = \frac{\delta}{48,5\,d}$, & ainsi l'élévation entiere des eaux par dessus les plus basses causée par la Lune, sera $= \frac{15}{4} \times \frac{\delta}{48,5\,d} \times \frac{b^3}{B^3} \times b$, en entendant par B la distance de la Lune au centre de la terre. Si nous supposons à présent pour cette distance moyenne $B = 60\frac{1}{4}\,b$, & si nous faisons encore $b = 19695539$, nous aurons par rapport à la Lune l'élévation moyenne des eaux $= 6,96 \times \frac{\delta}{d}$ pieds, ou à peu près de $7 \times \frac{\delta}{d}$ pieds. Si nous voulons supposer les densités δ & d égales entr'elles, nous aurons sept pieds d'élévation, &

l'action solaire sera à l'action lunaire environ comme 2 à 7. M. *Newton* suppose $\frac{\delta}{d} = \frac{21}{17}$, & cette hypothèse fait l'élévation moyenne lunaire des eaux d'environ $8\frac{1}{2}$ pieds, & par conséquent l'action solaire à l'action lunaire environ comme 1 à $4\frac{1}{2}$: il avoit adopté cette proportion, & de-là il détermine $\frac{\delta}{d} = \frac{21}{17}$. M. *Daniel Bernoulli*, induit par d'autres raisons, suppose les actions moyennes du Soleil & de la Lune en raison de 2 à 5, & de-là il s'ensuit que les densités de la Lune & de la terre sont environ comme 5 à 7 : ce rapport des densités rend la masse de la terre environ 70 fois plus grande que celle de la Lune, pendant que M. *Newton* ne l'a fait que 39 fois plus grande. La proportion de M. *Bernoulli* paroît beaucoup mieux répondre aux systêmes astronomiques qui dépendent de cette détermination, que celle de M. *Newton*, & des Géométres du premier ordre ont témoigné la même préférence.

X I X.

Nous voyons au reste que les élévations des eaux qui proviennent de l'action lunaire, sont encore en raison réciproque des cubes des distances de la Lune à la terre, tout comme par rapport au Soleil : cette raison fera varier considérablement les marées à cause de la grande excentricité de l'orbite lunaire, de maniere que la plus petite élévation dans l'apogée de la Lune, sera à la plus grande élévation dans le périgée de cet astre, environ comme 2 à 3, & cette variation répond parfaitement bien aux observations.

X X.

Pour voir maintenant les élévations & les abaissemens successifs des eaux pendant une marée entiere tant solaire que lunaire,

il ne faut pas se contenter de connoître la quantité $\mathfrak{C}$ ou l'élévation
Fig. 1. du point B par dessus le point G ; il faut connoître encore quelle est la hauteur du point B par dessus un point quelconque O.

Fig. 2. Soit donc l'ellipse $GOBHD$ dans la seconde figure, la même que dans la premiere ; qu'on tire du centre C & du rayon CG le quart de cercle Gob, & les deux demi diamétres CbB & CoO ; il est facile à démontrer par la nature d'une ellipse presque circulaire, que Bb sera à Oo, comme le quarré du sinus total au quarré du sinus de l'angle GCO ; si on appelle donc le sinus total 1 & le sinus de l'angle $GCO = s$, on aura la petite hauteur $Oo = ss\mathfrak{C}$ & $Bb - Oo = (1 - ss)\mathfrak{C}$. On remarquera dans l'application, que l'angle OCB mesure la distance depuis le Zenith jusqu'au luminaire en question. Voici donc à présent comment on pourra connoître les haussemens & les abaissemens des eaux, quelle que soit la latitude du lieu & la déclinaison de la Lune ou du Soleil. Je ne parlerai que des marées solaires pour m'énoncer avec plus de précision ; mais le tout doit s'entendre de même par rapport aux marées lunaires.

XXI.

Lorsque le Soleil est à l'horizon, l'axe solaire est horizontal, & on se trouve toujours dans l'équateur solaire. C'est donc toujours alors que les eaux sont les plus basses ; on se trouve à ce moment au point G, & comme cela est général, il est bon de partir de ce point. Ensuite les eaux s'éleveront à mesure que le Soleil approchera du méridien, & elles seront les plus hautes au moment que le Soleil y passera ; si la hauteur méridienne du Soleil est représentée par l'angle GCO, alors la petite Oo marquera la plus grande élévation des eaux, & elle sera égale à $ss\mathfrak{C}$ en entendant par s le sinus de la hauteur méridienne du Soleil : après cela les eaux commenceront à baisser jusqu'à ce que le Soleil se couche ; cette marée est appellée *marée de dessus*. Après le coucher du Soleil les eaux recommenceront à s'élever, parce qu'on s'approche

de l'autre pole solaire, & cette élévation durera jusqu'au passage inférieur du Soleil par le méridien, & si on appelle σ le sinus de l'arc du méridien compris entre le Soleil & l'horizon, la plus grande élévation des eaux sera $= \sigma\sigma S$; enfin les eaux recommenceront à baisser jusqu'au moment du lever du Soleil : ces secondes marées sont appellées *marées de dessous*. Voici à présent quelques propriétés des marées solaires, mais qui souffrent de grandes altérations par des causes étrangéres.

Ce n'est que sous la ligne que les marées de dessus & les marées de dessous sont égales entr'elles ; dans tous les autres paralléles ces deux espéces de marées différent tant en hauteur qu'en durée, à moins que la déclinaison du Soleil soit nulle.

Vers les équinoxes les marées solaires de dessus & de dessous sont égales, mais elles sont d'autant plus petites, que la latitude du lieu est plus grande, & cela en raison quarrée des sinus des latitudes.

Près des poles il peut arriver qu'il n'y ait qu'une seule marée dans le temps de 24 heures, & cela arriveroit dans les climats où le Soleil ne se couche & ne se leve pas. Dans ces cas la haute mer & la basse répondent aux passages du Soleil par le méridien ; mais ces sortes de marées seront comme insensibles à cause des grandes latitudes.

XXII.

Tout ce que nous venons de dire sur les marées solaires est également vrai pour les marées lunaires, pourvu qu'on fasse les changemens qui conviennent aux termes. De là on voit qu'on peut toujours exprimer pour chaque moment l'élévation des plus hautes eaux par dessus les plus basses. Soit l'élévation totale des eaux représentée par la petite ligne Bb pour le Soleil $= S$, & pour la Lune $= L$; soit le sinus de la hauteur verticale du Soleil $= s$ & celui de la Lune $= t$, on aura toujours dans ce moment là l'élévation entiere des eaux provenante de l'action réunie des deux

luminaires $= ssS + ttL$: par cette ſeule expreſſion on réduit toutes les queſtions qu'on peut former ſur les marées aux calculs aſtronomiques : mais on remarquera que ladite élévation $ssS + ttL$ doit ſe rapporter à la ſurface ſphérique *Gob* telle qu'elle feroit dans les ſizigies ſans les autres circonſtances. Cette hauteur changera continuellement juſqu'à ce qu'elle devienne la plus grande, & alors c'eſt la haute mer, après quoi elle diminuera pendant environ ſix heures, & puis on aura la baſſe mer; la différence entre les deux hauteurs donnera ce qu'on appelle *hauteur de marée.* Ainſi on voit que la hauteur de marée dépend d'un grand nombre de circonſtances, ſçavoir de la déclinaiſon de chaque luminaire, de l'âge de la Lune, de la latitude du lieu, & enfin des diſtances des deux luminaires au centre de la terre, & ſi on vouloit examiner notre queſtion au long ſuivant toutes ces circonſtances, on s'ouvriroit un vaſte champ de Problême : mais comme cela nous meneroit bien loin au delà de notre deſſein, nous ne nous arrêterons plus qu'aux principales.

XXIII.

Suppoſons d'abord l'orbite de la Lune & celle du Soleil parfaitement dans le plan de l'équateur; conſidérons de plus ces orbites comme parfaitement circulaires, & prenons un point ſous la ligne, alors on pourra ſuppoſer $s = 1$ & $t = 1$; cela arriveroit à midi dans les ſizigies, & l'élévation entiere des eaux ſeroit exprimée par $S + L$, mais ſix heures après on aura à peu près $s = o$ & $t = o$, & les eaux n'auront plus aucune élévation; ainſi la hauteur de marée ſera exprimée dans les ſizigies par $S + L$: mais dans les quadratures on aura au moment du paſſage de la Lune par le méridien $t = 1$ & $s = o$, & l'élévation des eaux ſera $= L$; enſuite ſix heures après on aura $s = 1$ & t à peu près $= o$, & l'élévation des eaux $= S$, & la hauteur de marée ſera $= L - S$. Donc les hauteurs de marée dans les ſizigies & dans les quadratures, ſeront comme $L + S$ à $L - S$.

M. *Newton* s'eſt ſervi de cette proportion pour en déduire le rapport de L à S, qu'il trouve à peu près comme $4\frac{1}{2}$ à 1.

Il eſt de ſi grande conſéquence de déterminer ce rapport, non ſeulement pour la perfection de la théorie des marées, mais encore pour pluſieurs autres matieres, que je n'héſiterai pas d'expoſer le ſentiment de M. *Bernoulli* ſur ce ſujet. Il eſt à remarquer qu'il y a un grand nombre de cauſes ſecondes qui mettent une différence conſidérable entre la réalité & les réſultats de la théorie pure, plus ou moins ſuivant la nature de la matiere dont il s'agit. Dans nos ports & dans ceux de l'Angleterre, les marées ne ſont pas cauſées immédiatement par l'action des deux luminaires ; ce ſont plutôt des ſuites des marées du grand Océan, tout comme les marées de la mer Adriatique ſont des ſuites des petites marées de la mer Méditerranée ; les marées primitives peuvent différer en tout très-ſenſiblement des marées ſecondaires : auſſi le rapport entre les grandes marées & les marées batardes, eſt-il très-différent dans chaque port ; il n'y a donc rien à établir ſur ces ſortes d'obſervations faites dans les ports de nos climats. Il faudroit plutôt avoir de pareilles obſervations faites ſur les bords d'une petite iſle ſituée près de la ligne dans une mer profonde, & ouverte de tout côté juſqu'à une très-grande étendue. Il y a toutes les apparences qu'on y remarqueroit une autre proportion entre les grandes marées & les marées batardes, que celle de 9 à 5 obſervée par *Sturm*, au deſſous de Briſtol, qui fait $\frac{L}{S} = \frac{7}{2}$, & qui réduite à l'état moyen des circonſtances variables donne ſuivant le calcul de M. *Newton* $\frac{L}{S} = \frac{9}{2}$ ou plutôt $= 4,4815$.

Il faut remarquer enſuite que les marées ne ſauroient entiérement ſe conformer à l'état de l'équilibre ; cela ſuppoſeroit que toute la mer pût prendre à chaque moment ſa figure d'équilibre ſans aucun mouvement ſenſible, & il faudroit pour cela que le

mouvement diurne de la terre se fit beaucoup plus lentement qu'il ne se fait. Au contraire si la rotation de la terre se faisoit avec une rapidité extrêmement grande, il ne pourroit y avoir aucune marée sensible : cela fait déja voir que la différence des marées sera plus petite dans la réalité qu'elle ne devroit être suivant le calcul fondé sur l'équilibre : c'est par cette raison que les marées de dessus ne different pas à beaucoup près des marées de dessous qui les suivent autant que l'indique le calcul précédent, tout mouvement tâchant à se conserver tel qu'il est par sa nature. Il est donc entierement sûr que les marées batardes sont plus grandes, & les grandes marées plus petites qu'elles ne seroient suivant le simple équilibre : il sera donc nécessaire de supposer les grandes marées moyennes aux marées batardes moyennes suivant la loi de l'équilibre en plus grande raison que de 9 à 5, & si on les supposoit comme 7 à 3, on en tireroit le rapport de $\frac{L}{S} = \frac{5}{2}$. C'est-là le rapport auquel M. *Daniel Bernoulli* s'est déterminé, après avoir rassemblé sous ce même point de vûe toutes les variations des marées. La pénétration & la circonspection de ce Physicien Géométre, méritent sans doute qu'on adopte ce rapport moyen jusqu'à ce que d'autres observations répandent de nouvelles lumieres sur cette question, & cela d'autant plus qu'il satisfait mieux aux autres théories qui dépendent de la détermination de la masse de la Lune, & que M. *Bernoulli* fonde sa correction sur des variations qui ne sauroient souffrir aucune altération sensible par les susdites causes secondes que nous dirons bientôt.

XXIV.

Reprenons ici notre formule $ssS + ttL$, qui marque l'élévation des eaux pour chaque moment, afin d'en déduire les hauteurs & les heures des marées pendant le cours de toute une lunaison pour les suppositions qu'on a faites au commencement du précédent Article. Dans les hautes & les basses mers cette

cette quantité $ssS + ttL$ fait un *maximum* ou un *minimum*.

Soit $AFGEM$ l'équateur que nous supposons pour faciliter nos calculs dans le plan de l'écliptique & de l'orbite lunaire; AE le diamétre horizontal; G le zenith : supposons le Soleil en F & la Lune en H, & un moment après en f & h, nous aurons $FB = s$; $fb = s + ds$; $HD = t$; $hd = t - dt$; or, $ds = \sqrt{1 - ss} \times Ff$ & $-dt = \sqrt{1 - tt} \times Hh =$ à peu près, à cause du mouvement de la Lune, $\frac{29}{30} \times \sqrt{1-tt} \times Ff$, & comme la quantité $ssS + ttL$ doit faire un *maximum* ou un *minimum*, nous aurons $Ssds + Ltdt = o$; si nous substituons donc pour ds & pour dt leurs valeurs $\sqrt{1-ss} \times Ff$ & $-\frac{29}{30} \times \sqrt{1-tt} \times Ff$, nous aurons alors $Ss\sqrt{1-ss} \times Ff = \frac{29}{30} \times L \times t\sqrt{1-tt} \times Ff$, ou enfin $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{29L}{30S}$. Fig. 3.

C'est de cette équation qu'on peut tirer les principales propriétés des marées lunaires & solaires, mêlées & confondues.

XXV.

Nous voyons qu'au moment des hautes & des basses mers les quantités $s\sqrt{1-ss}$ & $t\sqrt{1-tt}$ ont toujours le même rapport, qui est celui de $29L$ à $30S$, ou à peu près de 5 à 2 : or la quantité $s\sqrt{1-ss}$ n'est jamais plus grande que $\frac{1}{2}$, ainsi la quantité $t\sqrt{1-tt}$ ne peut jamais surpasser $\frac{1}{5}$, ou plutôt $\frac{30}{29} \times \frac{1}{5}$ ou $\frac{6}{29}$; il faut donc que l'un des facteurs t ou $\sqrt{1-tt}$ soit toujours assez petit, ce qui marque que la Lune est toujours ou près du méridien ou près de l'horizon dans ces momens. Dans les sizigies & dans les quadratures la haute mer se fait précisément, quand

la Lune passe par le méridien & la basse mer, quand la Lune est à l'horizon : mais hors des sizigies & des quadratures ce n'est pas la même chose. Soit, par exemple, $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, il faudra faire $t\sqrt{1-tt} = \frac{6}{29}$, & cette équation fait l'arc GH à peu près de 12 ^{d} ou 48 minutes lunaires, ou environ 50 minutes ordinaires après le passage de la Lune par le méridien, & cela arrivera lorsque la Lune est à 57 ^{d} du Soleil, ou à la neuviéme marée avant la plus haute, puisque la plus haute marée ne se fait que trois ou quatre marées après les sizigies, ce qui peut prévenir de différentes causes. Ce sont là les marées qui retardent le plus sur le mouvement de la Lune. Si nous avions supposé le rapport de L à S plus grand que de 5 à 2, nous aurions trouvé en même raison l'arc GH plus petit ; dans l'hypothèse de M. *Newton* il ne seroit que d'environ 7 ^{d}, & la haute mer ne retarderoit jamais au-delà de 27 minutes sur le mouvement de la Lune, ce qui est contraire aux observations. On voit donc qu'on peut déduire le rapport de L à S, du plus grand retardement de la pleine mer sur le passage de la Lune par le méridien ; mais il faudra employer en même temps toutes les corrections : on remarquera aussi que par des causes particulieres la pleine mer dans les sizigies ne se fait pas à midi, mais quelque temps après suivant la position du lieu ; ce temps doit être ajoûté au temps des observations ; par exemple à *Brest* on a la pleine mer dans les sizigies à 3 ^{h} 15 $'$, il faudroit donc, suivant l'hypothèse de M. *Bernoulli*, que la marée la plus tardive se fit 50 $'$ ordinaires après le passage de la Lune par le méridien, outre les 3 ^{h} 15 $'$ du port de *Brest*, c'est-à-dire, 4 ^{h} 5 $'$ après le passage par le méridien ; cela suppose que la Lune est dans sa moyenne distance de la terre, car si elle étoit dans son périgée, la quantité L en deviendroit plus grande, & le retard plus petit.

XXVI.

Un autre phénoméne remarquable qui répond parfaitement à l'hypothèse de M. *Bernoulli*, & qui peut donner un grand poids à toute cette théorie, est une certaine inégalité entre les intervalles de deux marées de dessus qui se suivent immédiatement : cet intervalle moyen est de 24^h lunaires, ou d'environ $24^h\ 50'$ solaires ; mais on a remarqué que dans les sizigies cet intervalle observé un grand nombre de fois n'est que de $24^h\ 35'$, & dans les quadratures de $25^h\ 25'$. Pour expliquer & pour calculer ce phénoméne, supposons que dans un certain jour la Lune & le Soleil répondent au point G, & qu'au même moment il y ait pleine mer audit point G ; on voit bien que le lendemain il y aura pleine mer quand la Lune sera en H & le Soleil en F, & que l'intervalle entre les deux pleines mers sera exprimé en heures solaires par la circonférence du cercle augmentée de l'arc GF : or tout l'arc HF qui marque la distance de la Lune au Soleil, est à peu près de $12^d\ 30^m$, faisons donc comme ci-dessus le sinus de l'arc $GF = \sqrt{1-ss}$, le sinus de l'arc $HG = \sqrt{1-tt}$, & il faudra d'abord satisfaire à la condition que ces deux petits arcs pris ensemble fassent un arc de $12^d\ 30^m$. Ici nous pourrons pour faciliter les calculs sans erreur sensible, prendre les sinus de ces petits arcs pour les arcs mêmes, & supposer $\sqrt{1-ss} + \sqrt{1-tt} = Sin.\ 12^d\ 30^m = 0,21643$, & par conséquent $\sqrt{1-tt} = 0,21643 - \sqrt{1-ss}$; nous pourrons aussi par la même raison supposer $s = 1$ & $t = 1$: après ces substitutions notre équation du § 24. $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{29}{30} \times \frac{L}{S}$ se change en celle-ci $\frac{\sqrt{1-ss}}{0,21643 - \sqrt{1-ss}} = \frac{29}{30} \times \frac{L}{S}$: mettons encore $\frac{5}{2}$ pour $\frac{L}{S}$ & nous aurons

$\frac{\sqrt{1-ss}}{0,21643-\sqrt{1-ss}} = \frac{29}{12}$, qui donne $\sqrt{1-ss}$ ou le ſinus de l'arc cherché $GF = \frac{29}{41} \times 0,21643 = 0,15308$, qui donne à $8^{d}\ 48'$, ou bien à $35\frac{1}{5}$ minutes horaires, ce qui répond avec une harmonie remarquable aux obſervations. Examinons à préſent de même quel eſt l'intervalle de deux marées de deſſus qui ſe ſuivent immédiatement dans les quadratures. Suppoſons donc que dans un certain jour la Lune réponde au point *G* & le Soleil au point *A*, & que l'angle *ACG* ſoit de 90^{d}, la pleine mer ſera dans ce moment préciſément au point *G*; mais afin qu'il y ait au même point *G* pleine mer le lendemain, il faut que la Lune ſe trouve en *F* & le Soleil en *H*, de ſorte que l'arc *AH* marquera le temps qu'il faut ajouter aux 24^{h}, pour avoir le temps écoulé entre les deux pleines mers. Je traiterai encore les arcs *AH* & *GF* d'aſſez petits pour qu'ils puiſſent être cenſés égaux à leurs ſinus : ſuppoſons l'arc *AH* ou ſon ſinus $= s$; l'arc *GF* ou ſon ſinus $= \sqrt{1-tt}$, & l'arc *HGF* de 77 degrés & demi, & nous aurons $AH - GF = 12$ degrés 30 minutes, c'eſt-à-dire, $s - \sqrt{1-tt} = 0,21643$, ce qui donne $\sqrt{1-tt} = s - 0,21643$, pendant qu'on peut cenſer $\sqrt{1-ss} = 1$ & $t = 1$, & par conſéquent $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{s}{\sqrt{1-tt}} = \frac{s}{s-0,21643} = \frac{29}{12}$, ce qui donne $s = 0,36920$, qui répond à $21^{d}\ 40^{m}$, ou à 1 heure $26\frac{2}{3}$ minutes de temps, de ſorte que le temps total eſt de 25 heures $26\frac{2}{3}$ minutes, pendant que les obſervations l'ont fixé à 25 heures 25 minutes.

Fig. 5.

XXVII.

Cette harmonie entre les obſervations, la théorie, les calculs & l'hypothèſe de M. *Bernoulli* au ſujet du rapport de l'action moyenne lunaire à l'action ſolaire, ne nous permet plus de douter ni des unes ni des autres; ſi nous adoptons donc pour ledit rapport

celui de 5 à 2, il s'ensuit que la masse de la terre est à celle de la Lune comme 70 à 1. M. *Bernoulli* allégue aussi la raison pourquoi les observations sur les durées des marées & sur leurs intervalles, répondent mieux aux calculs qne celle qu'on fait sur les hauteurs inégales des pleines mers; c'est que ces hauteurs ont beaucoup d'influence les unes sur les autres, pendant que la durée d'une marée ne dépend point, ou seulement très-peu, de celle de la marée précédente.

XXVIII.

Nous voyons donc que le passage de la Lune par le méridien suivra la haute marée depuis les sizigies jusqu'aux quadratures, & qu'il la précédera depuis les quadratures jusqu'aux sizigies; que la plus grande anticipation, ou le plus grand retardement, sera d'environ 50 minutes solaires de temps; que dans le temps de la plus grande anticipation, ou du plus grand retardement, la distance entre la Lune & le Soleil doit être d'environ 57^{d}, & qu'ainsi la pleine mer avancera sur le passage de la Lune par le méridien de plus en plus pendant environ neuf marées, à compter depuis celle des sizigies, (ou plutôt depuis la plus haute marée) & que cette plus grande anticipation sera réparée dans les cinq marées suivantes; c'est-là la raison pourquoi les marées batardes paroissent plus irrégulieres, & il est facile de voir que la moindre cause accidentelle, ou cause seconde, peut empêcher ces marées batardes de se composer entierement suivant les régles d'équilibre.

XXIX.

Voilà l'explication des principaux phénoménes des marées, & tous les principes néceſſaires, pour comprendre celle de tous les autres qui sont en grand nombre, du moins autant que l'irrégularité des terres & de l'Océan peuvent le permettre. Il n'est pas difficile de voir ce que les différentes déclinaisons des deux luminaires & la latitude des lieux, peuvent contribuer à la formation des marées: cet examen ne demande que la solution de

quelques problêmes d'Astronomie & de Trigonométrie ; mais il convient sur tout d'examiner par quel mouvement les eaux de la mer tendent à se composer à l'équilibre, qu'elles ne trouvent jamais. Si on ne vouloit considérer que les seules marées lunaires, sans faire attention aux causes secondes non plus qu'à la déclinaison de la Lune, il faudroit considérer quatre points à 45 d au-dessus & au-dessous de l'horizon : dans ces quatre points il n'y auroit aucun mouvement horizontal, & les eaux n'y feroient que monter verticalement ou descendre; les eaux couleroient vers chacun de ces quatre points d'un côté par un mouvement oriental, & de l'autre par un mouvement occidental, & les plus grandes vîtesses de ces mouvemens seroient sous le méridien où se trouve la Lune, & à 90 d de ces deux points. Ces quatre points de repos montrent assez que les marées n'ont absolument rien de commun avec le courant général & permanent d'Est, & que ce courant, non plus que le vent général d'Est, ne sauroit être produit par l'action de l'un ou de l'autre luminaire sur la mer, ou sur l'atmosphére.

FIN.

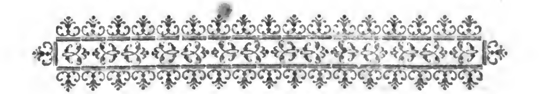


TABLE
DES MATIERES

Du Commentaire des Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle.

EXPOSITION ABREGÉE
DU SYSTÊME DU MONDE.



SOLUTION ANALYTIQUE

Des principaux problémes qui concernent le Systême du Monde.

SECTION PREMIERE.

Des trajectoires dans toute sorte d'hypothèse de pesanteur.

XXIV.

SECTION II.

De l'attraction des Corps en ayant égard à leurs figures.

PREMIERE PARTIE.

De l'attraction des sphéres.

SECONDE PARTIE.

De l'attraction des Corps de figure quelconque.

Z z ij

TROISIÉME PARTIE.

De l'attraction des sphéroïdes en particulier.

SECTION III.

De l'explication de la réfraction en employant le principe de l'attraction.

SECTION IV.

De la figure de la terre.

PREMIERE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

Qui traite de la figure de la Terre.

SECTION V.

Des Marées.

XVI.

ERRATA.

Tome II. Livre III. des Principes.

Page 118, ligne 15, grande, *lisez* grandes.
P. 140, l. 11 & ailleurs, *Montenarus*, lisez *Montanari.*
P. 142, l. 8, *Norberg*, lisez *Nuremberg.*
Ibid. l. 15, *Galletius*, lisez *M. Gallet.*
P. 144, l. 27, *Ophiuleus*, lisez *Ophiucus.*
P. 153, l. 23, éclairé, *lisez* éclairée.
P. 159, ligne derniere & la premiere de la 160, *Dunelmensis*, lisez de *Durham.*

Exposition des Principes.

P. 17, note (*l*) sensée, *lisez* censée.
P. 29, note (*u*) *Henelius*, lisez *Hevelius;* puis dans les lignes suivantes au lieu de *ellipti-coansatum*, *Sphæri-cocuspidatum*, lisez *elliptico-ansatum*, *Sphærico cuspidatum.*
P. 79, l. 25, *Sturminus*, lisez *Sturmius.*
P. 88, l. 22, *Colopressus*, lisez *Colepress.*
Ibid. l. 23. *Sturnius*, lisez *Sturmius.*
P. 108, l. 27, le parcoure, *lisez* le parcourt.
P. 137, l. 6, dans la formule radicale, *lisez* sous le second signe radical, au lieu de $\left(\frac{hh-2kh}{2}\right)^2$, lisez $\left(\frac{2kh-hh}{2}\right)^2$.

Et ligne 7, corrigez la même faute dans la valeur de *a*
P. 190, l. 9, aye, *lisez* ait.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Chancelier, la Traduction des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, avec un Commentaire analytique sur le même Ouvrage, par Madame la Marquise du Chastellet, & je n'y ai rien trouvé qui en pût empêcher l'impression. A Paris, ce 20 Décembre 1745.

Signé, CLAIRAUT.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos Amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre bien amée Madame la Marquise DU CHASTELLET, Nous a fait exposer qu'elle desireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa traduction qui a pour titre: *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle, par M. Newton*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires; A CES CAUSES, voulant traiter favorablement l'Exposante, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *Quinze années* consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement, ou autres, sans la permission expresse & par écrit de ladite Exposante, ou de ceux qui auront droit d'elle, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, & de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers à ladite Dame Exposante, ou à celui qui aura droit d'elle, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modéle sous le Contrescel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant de l'exposer en vente le Manuscrit qui aura servi de copie à l'Imprimeur sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de

France : le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Dame Exposante, ou ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement ; Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'éxécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNE' à Paris, le vingt-uniéme jour du mois de Janvier, l'an de grace mil sept cent quarante-six, & de notre Regne le trente-uniéme. Par le Roi, en son Conseil,

Signé, SAINSON, avec grille & paraphe.

Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 568. fol. 497. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris, le 7 Mars 1746.

Signé, VINCENT, *Syndic.*

Je reconnois avoir cedé le présent Privilege à M. Michel Lambert. A Paris, ce 27 Février 1746.

Signé, BRETEUIL DU CHASTELLET.

Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, fol. 498. conformément aux anciens Réglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 10 Juillet 1745. A Paris, le 7 Mars 1746.

Signé, VINCENT, *Syndic.*

